

## Функции случайных величин

### Задачи изучения функций СВ

Часто практический интерес представляют не сами СВ, а определенные (не случайные) математические функции от них. Например, угловые положения беспорядочно вращающегося удлиненного фрагмента подчиняются некоторому закону распределения (возможно, равномерному), однако аэродинамическое сопротивление на участке траектории рассчитывают по «среднему миделю», то есть по МО случайной площади проекции фрагмента на плоскость, перпендикулярную вектору скорости. Сама площадь проекции функционально зависит от угловых координат, но из-за случайного характера аргументов также имеет случайные значения, распределение которых отличается от распределения аргументов.

Зависимость  $Y = \varphi(X)$ , где  $\varphi$  – неслучайная функция, ставит в соответствие возможным значениям СВ  $X = x$  одно значение СВ  $Y: Y = y = \varphi(x)$ . Функция  $\varphi$  может иметь несколько аргументов  $Y = \varphi(X_1, \dots, X_n)$ , может быть векторной  $Y = \varphi(X)$ . Если закон распределения СВ  $X$  известен, можно построить закон распределения  $Y$  или ограничиться определением ее числовых характеристик (ЧХ). Так, чтобы учесть влияние аэродинамического сопротивления на потерю скорости фрагмента, достаточно знать МО площади проекции, но для анализа поражающего действия этого мало, возможность пробития определяет фактическая поперечная нагрузка, а не ее МО.

### Числовые характеристики функций случайных величин

Если известен закон распределения СВ  $X$  и задана функция  $y = \varphi(x)$ , определяющая реализации СВ  $Y = \varphi(X)$ , можно получить закон распределения  $F_Y(y)$ , после чего вычислить  $M[Y]$ ,  $D[Y]$  и другие характеристики. Если достаточно знать только числовые характеристики, их можно найти по известному закону  $F_X(x)$  без построения  $F_Y(y)$ , что подтверждает следующий пример.

### Пример функции дискретной СВ

Число обнаруженных целей  $X$  подчиняется закону Пуассона, из них число атакованных целей  $Y$  ограничено боезапасом  $n: Y = \min(X, n)$ . Для нахождения среднего числа атакованных целей рассмотрим СВ  $Y$  как функцию случайного аргумента  $X$  при данном  $n$  и дополним ряд распределения  $X$  строкой значений  $\varphi(x_i) = \min\{x_i, n\}$ . Третья и вторая строки расширенной таблицы (Таблица 9.1) содержат возможные значения  $Y$  и соответствующие им вероятности, но эти строки не являются рядом распределения, так как в столбцах  $x_i \geq n$  находятся одинаковые значения  $y_i = \varphi(x_i) = n$ , а ряд распределения должен быть строго упорядоченным по возрастанию возможных значений.

Таблица 9.1. Ряд распределения СВ  $X$ , дополненный значениями  $y_i = \varphi(x_i)$

$x_i$	0	1	...	$n-1$	$n$	$n+1$	...
$p_i$	$p_0$	$p_1$	...	$p_{n-1}$	$p_n$	$p_{n+1}$	...
$\varphi(x_i)$	0	1	...	$n-1$	$n$	$n$	...

Таблица 9.2. Ряд распределения СВ  $Y$

$y_i$	0	1	...	$n-1$	$n$
$g_i$	$p_0$	$p_1$	...	$p_{n-1}$	$1 - \sum_{i=0}^{n-1} p_i$

Ряд распределения  $Y$  (Табл. 9.2) в последнем столбце  $Y = n$  объединяет события  $X \geq i, \forall i \geq n$ , значит  $P(Y = n) = P\left(\sum_{i=n}^{\infty} (X = x_i)\right) = 1 - P\left(\sum_{i=0}^{n-1} (X = x_i)\right)$ , поэтому сумма произведений  $\varphi(x_i)$  на соответствующие вероятности  $P(X = x_i)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i \varphi(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} i p_i + \sum_{i=n}^{\infty} n p_i = \sum_{i=0}^{n-1} i p_i + n \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} p_i\right) = M[\varphi(x)]$$

совпадает с МО, вычисленным по ряду распределения  $Y$ .

**Интегральные числовые характеристики функции одной СВ**

Таким образом, получать закон распределения функции СВ нет необходимости, если нужно знать только ее моментные характеристики. Начальные моменты функций дискретной СВ можно вычислить по формуле:

$$\alpha_k[Y] = M[\varphi(x)^k] = \sum_i \varphi(x_i)^k p_i \quad (9.1)$$

Если  $X$  – непрерывная СВ с плотностью  $f(x)$ , начальные моменты  $k$ -й степени функции  $\varphi(X)$  можно получить интегрированием возможных значений  $\varphi^k(x)$  по элементам вероятностей  $f(x)dx$ :

$$\alpha_k[Y] = M[Y^k] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^k(x) f(x) dx. \quad (9.2)$$

Центральные моменты функции СВ вычисляют согласно определению:

$$\mu_k[Y] = M[(\varphi(x) - M[Y])^k] \quad (9.3)$$

**Пример 1: средняя проекция стержня при пространственном беспорядочном вращении**

Среднюю длину пробойины в плоском экране от быстро летящего стержня длиной  $l$ , свободно вращающегося в плоскости, перпендикулярной к экрану (рис. 9.1), можно определить как первый начальный момент функции  $Y = l \cos X$  угла  $X$  между стержнем и экраном, распределенного равномерно в интервале  $[0, \pi/2]$ . Подставляя в формулу (9.2)  $\varphi(x) = l \cos x, f(x) = 2/\pi$  при  $k = 1$ , получим

$$M[Y] = \int_0^{\pi/2} l \cos x \frac{2}{\pi} dx = \frac{2l}{\pi} = 0,637l.$$

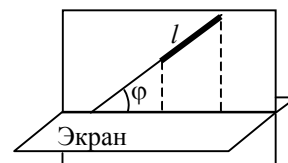


Рис. 9.1. Проекция стержня в плоском вращении

**Числовые характеристики функции нескольких СВ**

Начальные моменты функции векторного аргумента  $Y = \varphi(X_1, \dots, X_n)$  вычисляются  $n$ -кратным интегрированием  $k$ -й степени функции  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  по элементам вероятностей  $f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$ :

$$\alpha_k[Y] = M[Y^k] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \dots, x_n)^k f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (9.4)$$

**Пример 2: средняя проекция стержня при пространственном вращении**

Пространственную ориентацию стержня зададим в сферической системе координат углами  $\varphi$  и  $\theta$  (рис. 9.2). Оба угла – возможные значения СВ  $\Phi \in [0, \pi/2]$  и  $\Theta \in [0, 2\pi]$ . Длина проекции стержня  $l \cos\Phi$  зависит только от  $\varphi$ , но по условию равновозможных ориентаций стержня можно определить не  $f_\Phi(\varphi)$ , а совместную плотность  $f(\theta, \varphi)$ . По этому условию элемент вероятности  $f(\theta, \varphi) d\theta d\varphi$  пропорцио-

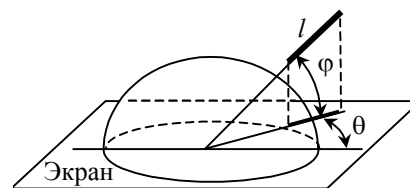


Рис. 9.2. Проекция стержня

нален площади элемента сферической поверхности единичного радиуса  $\cos \varphi d\varphi d\theta$ , т.е.  $f(\theta, \varphi) = A \cos \varphi$ . Основное свойство плотности распределения

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} A \cos \varphi d\theta d\varphi = 1$$

выполняется при  $A = \frac{1}{2\pi}$ . Среднюю длину проекции найдем по формуле (9.4)

$$M[Y] = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} l \cos \varphi \frac{1}{2\pi} \cos \varphi d\theta d\varphi = l \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{l}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{\pi l}{4}.$$

Длина проекции зависит только от угла  $\Phi$ , найдем его распределение

$$f_{\Phi}(\varphi) = \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos \varphi d\theta = \cos \varphi,$$

и вычислим ту же характеристику по формуле (9.3):

$$M[Y] = \int_0^{\pi/2} l \cos \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{\pi l}{4} \approx 0,785l.$$

Средняя длина проекции немного больше, чем в плоском случае потому, что распределение случайного угла между стержнем и экраном в пространстве подчиняется не равномерному закону, а закону косинуса.

**Пример 3:**  
средняя площадь  
проекции паралле-  
лелепипеда в  
пространственном  
вращении

Случайную ориентацию по отношению к параллелепипеду со сторонами  $a, b, c$  занимает экран, так что его нормаль имеет в сферической системе координат случайное направление  $(\Phi, \Theta)$ , распределенное по закону  $f(\theta, \varphi) = 1/(2\pi) \cos \varphi$ . Грань  $ac$  горизонтальна, грань  $bc$  перпендикулярна к направлению  $\theta = 0$  (рис. 9.3). Площадь проекции параллелепипеда (выпуклого тела) равна сумме площадей проекций видимых граней:

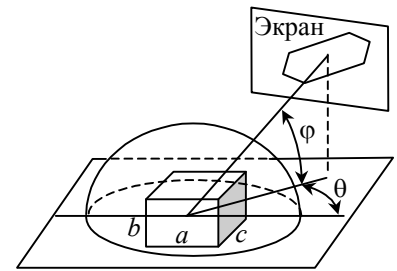


Рис. 9.3. Случайная проекция параллелепипеда

$$S = ac \sin \varphi + (ab \sin \theta + bc \cos \theta) \cos \varphi. \quad (9.5)$$

По формуле (9.4) найдем МО площади проекции:

$$M[S_{\Gamma}] = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} S(\theta, \varphi) f(\theta, \varphi) d\theta d\varphi = ac \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \frac{1}{2\pi} \cos \varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} (ab \sin \theta + bc \cos \theta) d\theta \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \frac{1}{2\pi} \cos \varphi d\varphi = \frac{ab + bc + ac}{2}.$$

Средняя площадь проекции параллелепипеда в 4 раза меньше его полной площади  $2(ab + bc + ac)$ . Площадь проекции любого выпуклого случайно ориентированного тела на плоскость равна одной четверти его полной площади (лемма Коши). Сравним результаты вычисления средней площади проекции по формуле (9.4) и по лемме Коши для параллелепипеда  $1 \times 2 \times 3$ . Так как в (9.5) учтены только видимые грани, численное интегрирование нужно проводить в пределах  $0 < \theta < \pi/2$ , увеличив затем результат в 4 раза:

```
>> a=1;b=2;c=3;M=(a*c+b*c+b*a)/2
M = 5.5000
>> M=dblquad(@(f,t) (a*c*sin(f)+b*(a*sin(t)+c*cos(t))*cos(f)).*cos(f)/(2*pi),0,pi/2,0,pi/2)*4
M = 5.5000
```

Результаты, естественно, совпадают, но численным интегрированием можно получить и второй начальный момент, чтобы вычислить дисперсию площади проекции:

```
>> a2=dblquad(@(f,t) (a*c*sin(f)+b*(a*sin(t)+c*cos(t))*cos(f)).^2.*cos(f)/(2*pi),0,pi/2,0,pi/2)*4;
>> D=a2-M^2,sigma=sqrt(D)
D = 1.3622    sigma = 1.1671
```

Очевидно, у куба с той же площадью поверхности дисперсия минимальна:

```
>> a=sqrt(11*2/6);b=a;c=a;
>> M=dblquad(@(f,t) (a*c*sin(f)+b*(a*sin(t)+c*cos(t))*cos(f)).*cos(f)/(2*pi),0,pi/2,0,pi/2)*4
M = 5.5000
>> a2=dblquad(@(f,t) (a*c*sin(f)+b*(a*sin(t)+c*cos(t))*cos(f)).^2.*cos(f)/(2*pi),0,pi/2,0,pi/2)*4;
>> D=a2-M^2,sigma=sqrt(D)
D = 0.3124    sigma = 0.5590
```

### Числовые характеристики линейных функций СВ

Числовые характеристики некоторых функций СВ можно вычислить непосредственно по числовым характеристикам аргументов.

МО и дисперсия полилинейной функции

Непосредственно из свойств ЧХ следует, что МО линейной функции

$Y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i$  равно той же функции от МО аргументов (Лекция 3):

$$M[Y] = M \left[ a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i \right] = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i M[X_i]. \quad (9.6)$$

Дисперсию полилинейной функции можно представить как комбинацию элементов корреляционной матрицы:

$$D[Y] = M \left[ \sum_{i,j=1}^n a_i a_j \dot{X}_i \dot{X}_j \right] = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j K_{ij}^{(X)} = \sum_{i=1}^n a_i^2 D[X_i] + 2 \sum_{i<j} a_i a_j K_{ij}^{(X)}. \quad (9.7)$$

МО и дисперсия произведения СВ

Согласно формуле (3.12) МО произведения двух СВ отличается от произведения их МО на величину корреляционного момента, следовательно, МО произведения некоррелированных СВ равно произведению их МО:  $M[X \cdot Y] = M[X]M[Y]$ . Обобщение этой формулы на произведение *нескольких* некоррелированных СВ неправомерно, так как некоррелированность между парами СВ не означает некоррелированность между подсистемами. Но если сомножители независимы, то

$$M \left[ \prod_i X_i \right] = \prod_i M[X_i]. \quad (9.8)$$

Таким же свойством обладают и МО произведений степеней независимых СВ – начальные моменты:

$$\alpha_k \left[ \prod_i X_i \right] = M \left[ \prod_i X_i^k \right] = \prod_i M[X_i^k] = \prod_i \alpha_k[X_i^k]. \quad (9.9)$$

Для дисперсии произведения независимых СВ, используя известную связь между центральными и начальными моментами, получим

$$D \left[ \prod_{i=1}^n X_i \right] = \alpha_2 \left[ \prod_{i=1}^n X_i \right] - \left( M \left[ \prod_{i=1}^n X_i \right] \right)^2 = \prod_{i=1}^n \alpha_2[X_i] - \prod_{i=1}^n m_i^2, \quad (9.10)$$

а если все  $X_i$  центрированы ( $M[X_i] = 0$ ,  $\mu_2[X_i] = \alpha_2[X_i]$ ), дисперсия их произведения равна произведению дисперсий.

**МО и корреляционная матрица векторной линейной функции**

Векторная линейная функция вида  $\bar{Y} = a\bar{X}$  имеет МО  $M[\bar{Y}] = aM[\bar{X}]$  и корреляционную матрицу  $K^{(X)} = a^2K^{(X)}$ . МО и корреляционная матрица линейной комбинации некоррелированных случайных векторов выражаются линейной комбинацией соответствующих характеристик слагаемых векторов:

$$\begin{aligned}\bar{Z} &= a\bar{X} + b\bar{Y}, \\ M[\bar{Z}] &= aM[\bar{X}] + bM[\bar{Y}], \\ \|K_{ij}^Z\| &= a^2\|K_{ij}^X\| + b^2\|K_{ij}^Y\|.\end{aligned}$$

**Пример 4: дисперсия суммарной ошибки в однократной корреляции**

Суммарная ошибка  $Y$  состоит из случайной ошибки  $X \in N(0, \sigma)$  и постоянной (по абсолютной величине) компенсации  $Z = -a \operatorname{sign}(X)$ . Параметр  $a$  нужно выбрать так, чтобы минимизировать суммарную дисперсию. Согласно формуле (9.7)  $D_y = D[X+Z] = D_x + D_z + 2K_{xz}$ . Дисперсия СВ  $X$  известна  $D_x = \sigma^2$ , дисперсия СВ  $Z$  с двумя одинаковыми по модулю возможными значениями  $a, -a$  равна квадрату этого параметра:

$$D_z = (-a)^2 P(X > 0) + a^2 P(X < 0) = a^2.$$

Корреляционный момент выразим через параметры  $\sigma, a$  с учетом того, что  $X$  и  $Z$  центрированы:

$$K_{xz} = M[X \cdot Z] = -2a \int_0^\infty x f(x) dx = -2a \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} a \sigma.$$

Теперь из условия минимума дисперсии суммарной ошибки

$$D_y = \sigma^2 + a^2 - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} a \sigma$$

получим оптимальное значение  $a^*$  и минимальную дисперсию:

$$a^* = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma = 0,8\sigma, \quad D_y^{\min} = \sigma^2 + \frac{2\sigma^2}{\pi} - 2\frac{2\sigma^2}{\pi} = \sigma^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \approx 0,36\sigma^2.$$

**Метод линеаризации функций**

Непосредственное определение ЧХ функций СВ по ЧХ аргументов ограничено классом линейных функций. В остальных случаях приходится привлекать законы распределения аргументов. Для приближенного вычисления МО и дисперсий произвольных функций СВ прибегают к их линеаризации в окрестности  $m_x$ :

$$\varphi(x) \approx \tilde{\varphi}(x) = \varphi(m_x) + \varphi'(x)|_{x=m_x} (x - m_x).$$

С учетом того, что  $M[x - m_x] = 0$ , по линеаризованной функции имеем:

$$m_y = M[Y] = \varphi(m_x), \quad (9.11)$$

$$D_y = D[Y] = [\varphi'(x)]^2 D_x, \quad \sigma_y = |\varphi'(x)| \sigma_x. \quad (9.12)$$

Если  $Y$  – функция нескольких случайных аргументов  $Y = \varphi(X_1, \dots, X_n)$ , известны МО  $m_i = M[X_i]$  и корреляционная матрица  $K$  системы  $(X_1, \dots, X_n)$ , ЧХ линеаризованной функции

$$Y \approx \varphi(m_1, \dots, m_n) + \sum_{i=1}^n \varphi'_{x_i}(m_1, \dots, m_n) (X_i - m_i) \quad (9.13)$$

можно определить по формулам:

$$m_y \approx \varphi(m_1, \dots, m_n), \quad (9.14)$$

$$D_y = \sum_{i=1}^n a_i^2 D_i + 2 \sum_{i < j} a_i a_j K_{ij}, \quad \text{где } a_i = \varphi'_{x_i}(m_1, \dots, m_n), \quad D_i = K_{ii}^X, \quad (9.15)$$

Перепишем формулу (9.15) как соотношение для линейризованных СКО:

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_i a_j r_{ij} \sigma_i \sigma_j, \text{ где } \sigma_i = \sqrt{D_i}, r_{ij} = \frac{K_{ij}^X}{\sigma_i \sigma_j}. \quad (9.16)$$

Если система  $(X_1, \dots, X_n)$  некоррелирована,

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^n \left[ \varphi'_{x_i}(x_1, \dots, x_n) \right]^2 \sigma_i^2. \quad (9.17)$$

### Законы распределения функций случайных величин

Если для определения числовых характеристик функций СВ достаточно знать законы распределения *аргументов*, то для вычисления вероятности попадания значения функции в заданную область нужен закон распределения *функции*. Так, минимальная дисперсия отклонения после однократной коррекции  $Y = X - a \operatorname{sign}(X)$  была найдена на основании известного закона  $f_X(x)$ , но для вычисления  $P(|Y| < y)$  надо знать закон распределения  $f_Y(y)$ .

**Функция распределения монотонных функций СВ**

Если  $\varphi(x)$  строго монотонна, обратная функция  $x = \varphi(y)^{-1} \equiv \psi(y)$  однозначна (рис. 9.4), поэтому событие  $(Y < y)$  эквивалентно событию  $(X < \psi(y))$ , если  $\varphi(x)$  возрастающая, или событию  $(X > \psi(y))$ , если  $\varphi(x)$  убывает, следовательно,

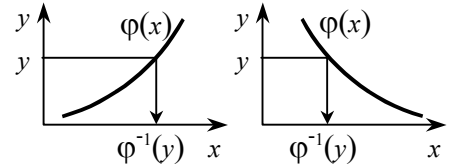


Рис. 9.4. Монотонные функции СВ  $X$

$$F_Y(y) = P(X < \psi(y)) = F_X(\psi(y)), \text{ если } \varphi(x) \text{ возрастающая}, \quad (9.21)$$

$$F_Y(y) = P(X > \psi(y)) = 1 - F_X(\psi(y)), \text{ если } \varphi(x) \text{ убывающая}, \quad (9.22)$$

**Пример 5: способ получения реализаций СВ с заданным законом распределения**

Функция распределения  $F$  любой СВ монотонно возрастающая, обратная к ней  $\varphi(x) \equiv F^{-1}(x)$  тоже возрастающая с областью определения в интервале  $[0, 1]$ . Пусть СВ  $X$  распределена по равномерному закону в интервале  $[0, 1]$ , т.е.  $F_X(x) = x$  на этом интервале. Закон распределения СВ  $Y = F^{-1}(X)$  можно получить, подставляя  $\psi(y) = \varphi^{-1}(y) = F(y)$  в формулу (9.21):

$$F_Y(y) = F_X(\psi(y)) = \psi(y) = F(y).$$

Таким образом, чтобы получить случайные реализации СВ  $Y$ , имеющей функцию распределения  $F(y)$ , нужно преобразовать реализации датчика случайных чисел  $\operatorname{rand}$  обратной функцией к  $F(y)$ :  $y = F^{-1}(\operatorname{rand})$ .

**Плотность распределения монотонных функций СВ**

Если СВ  $X$  непрерывна, имеет плотность  $f_X(x)$  и функция  $\varphi(x)$  дифференцируема, плотность СВ  $Y$  получим дифференцированием  $F_Y(y)$ :

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{\psi(y)} f_X(x) dx = f_X(\psi(y)) \psi'(y), & \psi'(y) > 0, \\ \frac{d}{dy} \int_{-\psi(y)}^{\infty} f_X(x) dx = -f_X(\psi(y)) \psi'(y), & \psi'(y) < 0. \end{cases}$$

Функция плотности  $f_Y(y)$ , как и полагается, положительна в обоих выражениях. Их можно заменить общей формулой, согласно которой плотность СВ  $Y$  равна плотности  $f_X(x)$  при соответствующем значении аргумента  $x = \psi(y)$ , умноженной на якобиан  $|\psi'(y)|$ :

$$f_Y(y) = f_X(\psi(y))|\psi'(y)|. \quad (9.23)$$

**Пример 6:**  
Связь закона распределения промаха с законом «хи-квадрат»

В лекции 7 плотность распределения  $n$ -мерного промаха связана с законом «хи квадрат» соотношением (7.22). В самом деле, если  $Y = R^2 / \sigma^2$ , и известен закон распределения  $f_Y(y, n)$  СВ «хи квадрат», можно получить закон распределения  $f_R(r, n)$  по формуле (9.23):

$$y = \psi(r) = \frac{r^2}{\sigma^2}, \quad \psi'(r) = \frac{2r}{\sigma^2}, \quad f_R(r, n) = \frac{2r}{\sigma^2} f_Y((r/\sigma)^2, n).$$

**Пример 7:**  
распределение проекции стержня

Закон распределения длины пробойны от стержневого ПЭ, свободно вращающегося при подлете к экрану в перпендикулярной плоскости, определяется законом равномерной плотности СВ  $X$  (угла между стержнем и экраном) на отрезке  $[0, \pi/2]$  и функцией  $\varphi(x) = l \cos x$ :

$$f_X(x) = \frac{2}{\pi}, \quad F_X(x) = \frac{2}{\pi}x, \quad \text{при } x \in [0, \pi/2],$$

$$x = \psi(y) = \arccos(y/l).$$

Функция  $\varphi(x)$  монотонно убывает на отрезке  $[0, \pi/2]$ , поэтому

$$F_Y(y) = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{y}{l}\right),$$

$$f_Y(y) = f_X(\psi(y))|\psi'(y)| = \frac{2}{\pi\sqrt{l^2 - y^2}}, \quad \text{при } y \in [0, l]$$

Теперь можно вычислить не только среднюю длину пробойны

$$M[Y] = \int_0^l y f_Y(y) dy = \int_0^l \frac{2l}{\pi\sqrt{l^2 - y^2}} dy = \left. -\frac{2\sqrt{l^2 - y^2}}{\pi} \right|_0^l = \frac{2l}{\pi},$$

но и вероятность того, что она не превышает заданную величину, для чего удобнее использовать не плотность, а функцию распределения. Например, вероятность того, что длина пробойны составит менее половины длины стержня,  $P(Y < 0,5l) = F_Y(0,5l) = 1 - 2 \arccos(0,5)/\pi = 1/3$ .

**Распределение не-монотонных функций СВ**

Немонотонная функция  $y = \varphi(x)$  может иметь несколько значений аргумента  $x_i, i = 1, 2, \dots$ , таких, что  $y = \varphi(x_i)$ . Значения  $x_i = \psi_i(y)$  выделяют на  $[a, b]$  непересекающиеся интервалы  $\Delta_i(y)$ , попадание в которые аргумента  $X$  эквивалентно событию  $(\varphi(X) < y)$ , поэтому  $F_Y(y) = P(Y < y) = \sum_i P(X \in \Delta_i(y))$ . Составим

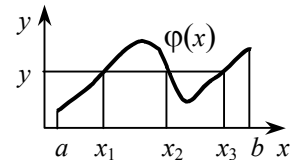


Рис. 9.5. Немонотонная функция СВ  $X$

это выражение для ситуации, изображенной на рис. 9.5:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = \int_a^{\psi_1(y)} f(x) dx + \int_{\psi_2(y)}^{\psi_3(y)} f(x) dx,$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = f(\psi_1(y))\psi_1'(y) + f(\psi_3(y))\psi_3'(y) - f(\psi_2(y))\psi_2'(y).$$

В отрицательных слагаемых, соответствующих нижним пределам интегралов, производные обратной функции также отрицательны. Общая формула для плотности распределения функции непрерывной СВ имеет вид:

$$f_Y(y) = \sum_i f(\psi_i(y))|\psi_i'(y)|, \quad \forall i: \varphi(x_i) = y. \quad (9.24)$$

**Пример 8:**  
распределение  
нормальной ошибки  
с однократной  
коррекцией

Суммарная ошибка случайной составляющей  $X \in N(0, \sigma)$  и коррекции  $K = -a \operatorname{sign}(X)$  рассматривалась как линейная функция двух СВ, что позволило найти оптимальное значение параметра  $a$  на основании свойств ЧХ. Но ее можно рассматривать и как функцию  $y = \varphi(x) = x - a \operatorname{sign} x$  одной СВ  $X$ , чтобы воспользоваться формулой (9.24) для построения закона распределения суммарной ошибки. Эта функция имеет двужначную обратную функцию  $\psi(y)$  при  $|y| < a$  (рис. 9.6):

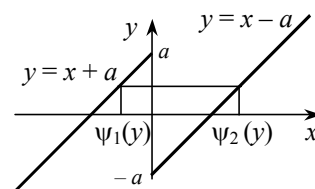


Рис. 9.6. Отклонение после коррекции  $y = x - a \operatorname{sign} x$

$$y = \varphi(x) = \begin{cases} x + a, & x < 0, & x = \psi_1(y) = y - a, & y < -a, & \psi_1'(y) = 1, \\ x - a, & x > 0, & x = \psi_2(y) = y + a, & y > -a, & \psi_2'(y) = 1. \end{cases}$$

Подстановка в (9.24) дает искомый закон распределения:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(\psi_1(y)) = f_X(y - a), & y < -a, \\ f_X(\psi_1(y)) + f_X(\psi_2(y)) = f_X(y - a) + f_X(y + a), & -a < y < a, \\ f_X(\psi_2(y)) = f_X(y + a), & y > a, \end{cases}$$

Составим выражения для расчетной сетки аргументов  $y$  в интервалах  $[-4, -a]$ ,  $[-a, a]$ ,  $[a, 4]$  и плотности распределения  $f_Y(y)$  в MATLAB:

```
>> Sy='I1=-4:0.01:-a; I2=-a:0.01:a; I3=a:0.01:4; I=[I1,I2,I3];';
>> Sf='fy=[f(X,I1-a),f(X,I2-a)+f(X,I2+a),f(X,I3+a)]; Dy=Trap(I.^2.*fy,I)';
```

Построим функцию  $f_Y(y)$  при  $\sigma = 1$  и оптимальном значении  $a = \sqrt{2/\pi} = 0,8$  на расчетной сетке, выведем график этой функции вместе с плотностью нормального закона  $N(0, 1)$ , а также вычислим дисперсию по сеточной плотности распределения (рис. 9.7):

```
>> X=Norm_1(0,1); a=sqrt(2/pi); eval(Sy); eval(Sf); plot(I,fy,'k',I,f(X,I),'g--'); hold on
Dy = 0.3624
```

Вычисленная дисперсия практически совпала с минимальным значением  $0,36\sigma^2 = 0,36$ , полученным в примере 4 из соотношений между ЧХ, но теперь можно оценить и вероятность попадания в любой заданный интервал, например:

```
>> T=[-1 1]; J=find(I>T(1) & I<T(2)); p=Trap(fy(J),I(J))
p = 0.5659
```

Итак, увеличение плотности распределения в области малых отклонений за счет ее уменьшения на больших отклонениях при оптимальном значении параметра  $a$  дает минимальную дисперсию 0.3624. Изменение параметра  $a$  в ту или другую сторону приводит к возрастанию дисперсии и снижению вероятности попадания в полосу:

```
>> a=a/2; eval(Sy); eval(Sf); plot(I,fy,'r');
Dy = 0.5224
```

```
>> J=find(I>T(1)&I<T(2)); p=Trap(fy(J),I(J))
p = 0.8380
```

```
>> a=2; eval(Sy); eval(Sf); plot(I,fy,'b'); J=find(I>T(1)&I<T(2)); p=Trap(fy(J),I(J))
Dy = 1.8085 p = 0.3097
```

Сравнение графиков (площадей под ними в интервале  $[-1, 1]$ ) объясняет снижение вероятности попадания в полосу  $[-1, 1]$  при отклонении параметра  $a$  от оптимального значения. Располагая законом распределения, можно оптимизировать параметр  $a$  по вероятности попадания в цель, а если имеется КЗП – по вероятности поражения цели (задача 5.18 в [1]).

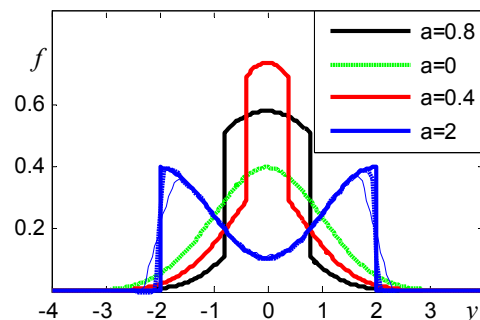


Рис. 9.7. Распределение отклонений после однократной коррекции

**Статистическое  
моделирование  
суммарной ошибки**

Разыграем реализации СВ  $X$ , прибавим к ним компенсацию ошибок  $a=2$  и восстановим статистический закон распределения суммарной ошибки:

```
>> N=100000; Z=Gen(X,N); I1=find(Z<0); I2=find(Z>0); d= Gen('rnd',-0.3,0.3,N);
>> z(I1)=Z(I1)+a; z(I2)=Z(I2)-a; [Fz,fz]=SmartHist(z); Show(fz,'b--')
```



Синяя пунктирная кривая на рис. 9.7 практически совпала с соответствующим теоретическим распределением. Это значит, что вероятность попадания в цель или в заданную область с тем же успехом можно вычислить и по статистическому закону:

```
>> L=find(fz.x>T(1) & fz.x<T(2));p=Trap(fz.f(L),fz.x(L))
p = 0.3050
```

По теоретическому закону при  $a = 2$  получено  $p = 0.3097$ . Статистическое моделирование позволяет исследовать влияние на функции СВ факторов, не учитываемых теоретической моделью. Внесем случайные ошибки величины компенсации (тонкая синяя кривая):

```
>> z(I1)=Z(I1)+a+d(I1);z(I2)=Z(I2)-a-d(I2);[Fz,fz]=SmartHist(z);Show(fz,'b')
```

Рассмотренная модель слишком бедна, чтобы показать все преимущества статистического моделирования законов распределения функций СВ. Но она построена на общей формуле (9.24), что позволяет легко модифицировать модель, чтобы учесть еще один регулярный фактор – отсутствие ненужных коррекций при малых отклонениях в пределах данной величины  $\varepsilon$  (рис. 9.8). В этой функции добавлен интервал, в котором  $\varphi(X) = X$ . Не составляя функции  $f_Y(y)$  сконструируем выражения для ее вычисления по рис. 9.8:

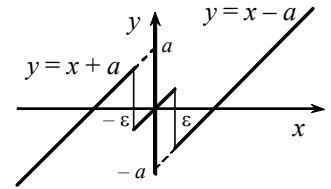


Рис. 9.8. Отклонение после коррекции с «мертвой» зоной

```
>> Sy='I1=-4:0.01:-a+e; I2=-a+e:0.01:-e;I3=-e:0.01:e;I4=e:0.01:a-e;I5=a-e:0.01:4;I=[I1,I2,I3,I4,I5];';
>> Sf='fy=[f(X,I1-a),f(X,I2-a)+f(X,I2+a),f(X,I3-a)+f(X,I3)+f(X,I3+a),f(X,I4-a)+f(X,I4+a),f(X,I5+a)];Dy=Trap(I.^2.*fy,I)';
```

Теперь можно построить график закона  $f_Y(y)$  и вычислить дисперсию той же командой, что и в предыдущем примере:

```
>> e=0.3; a=sqrt(2/pi);eval(Sy);eval(Sf);
Dy = 0.2988
>> figure, plot(I,fy,'r',I,f(X,I),'g--');
```

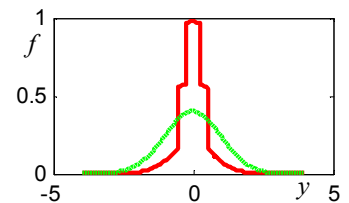


Рис. 9.9. Закон  $f_Y(y)$  с «мертвой» зоной

Как и следовало ожидать, дисперсия ошибки снизилась по сравнению с минимальной дисперсией без выделения «мертвой» зоны.

**Пример 9:**  
**распределение**  
**промаха после од-**  
**нократной**  
**коррекции**

По формуле (9.24) можно построить и закон распределения промахов на плоскости после однократной коррекции при круговом рассеивании. Если  $X \in N(0, \sigma)$  и  $Z \in N(0, \sigma)$ , промах  $R = \sqrt{X^2 + Z^2}$  подчиняется закону Рэлея с параметром  $\sigma$ . Коррекция промаха на величину  $a$  имеет смысл, если промах превышает допустимую величину  $\varepsilon$  ( $\varepsilon < a$ ). Суммарный промах после условной коррекции  $Y$  можно записать как функцию  $R$ :

$$Y = \begin{cases} R, & R < \varepsilon, \\ |R - a|, & R > \varepsilon \end{cases}$$

Чтобы найти оптимальные значения  $a$  и  $\varepsilon$ , нужно построить закон распределения  $f_Y(y)$ , в который  $a$  и  $\varepsilon$  войдут в качестве параметров, и выразить через этот закон соответствующий критерий (например, вероятность попадания в некоторую область). Построим обратную функцию  $\psi(r, a, \varepsilon)$  согласно рис. 9.10

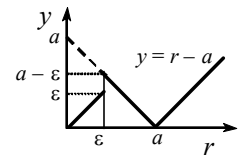


Рис. 9.10. Коррекция промаха

$$t = \varphi(r) = \begin{cases} r, & r < \varepsilon, & r = \psi_1(t) = t, & \psi_1'(t) = 1, \\ a - r, & \varepsilon < r < a, & r = \psi_2(t) = a - t, & \psi_2'(t) = -1, \\ r - a, & r > a, & r = \psi_3(t) = t + a, & \psi_3'(t) = 1. \end{cases}$$

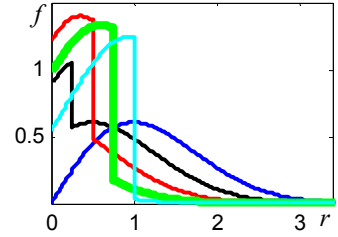
и выполним подстановку в (9.24):

$$f_T(t) = \begin{cases} f_R(\psi_1(t)) + f_R(\psi_2(t)) + f_R(\psi_3(t)) = f_R(t) + f_R(t+a) + f_R(a-t), & t < \varepsilon, \\ f_R(\psi_2(t)) + f_R(\psi_3(t)) = f_R(t+a) + f_R(a-t), & \varepsilon < t < a - \varepsilon, \\ f_R(\psi_3(t)) = f_R(a+t), & t > a - \varepsilon. \end{cases}$$

Составим соответствующие выражения

```
>> Sy='I1=0:0.001:e; I2=e:0.001:a-e;I3=a-e:0.1:4;I=[I1,I2,I3];'; s=1;
>> Sf='fy=[f_Rayl(I1,s)+f_Rayl(I1+a,s)+f_Rayl(a-I1,s),f_Rayl(I2+a,s)+f_Rayl(a-I2,s),f_Rayl(a+I3,s)];';
построим законы распределения и вычислим дисперсии промаха для нескольких значений a:
```

```
>> figure,hold on,c='bkrbcm';
>> for a=0:0.5:2.5 e=a/2;eval(Sy);eval(Sf);m=Trap(fy.*I,I);D=Trap(fy.*I.^2,I)-m^2:[a,m,D],plot(I,fy,c(a*2+1)),end
ans = 0      1.2519  0.4267
ans = 0.5000  0.7875  0.3730
ans = 1.0000  0.4997  0.2024
ans = 1.5000  0.4478  0.0920
ans = 2.0000  0.5659  0.0829
ans = 2.5000  0.7543  0.1063
```



При  $a = 0$  вычисленные МО и дисперсия совпадают с теоретическими (см. формулы (7.25), (7.26)). Дисперсия минимальна при  $a \approx 2$  (утолщенная кривая на рис. 9.11).

Рис. 9.11. Коррекция промаха

Статистическим моделированием кругового рассеивания подтвердим результаты теоретического определения закона и характеристик распределения промахов при  $a = 2$  и  $\varepsilon = a/2$ :

```
>> X=Norm_2([1 1]); N=100000; Z=Gen(X,N);R=Distance(Z); a=2;
>> Ind=find(R>a/2);Rk=R;Rk(Ind)=abs(R(Ind)-a);Y=repmat(Rk./R,2,1).* MyCenter(Z);
>> m=mean(Rk),sig=std(Rk);D=sig^2, ShowAll(Z,'r','k.')
m = 0.5716    D = 0.0819
```

**Пример 10:  
коррекция  
эллиптического  
рассеивания**

Результаты практически совпадают с теоретическим расчетом, значит и теоретическая модель и процедура статистического моделирования построены верно. Можно воспользоваться и для моделирования эллиптического распределения той же последовательностью команд, изменив лишь объект  $X$  нормального распределения:

```
>> X=Norm_2([3 1]); N=100000; Z=Gen(X,N); R=Distance(Z); a=4;
>> Ind=find(R>a/2);Rk=R;Rk(Ind)=abs(R(Ind)-a);Y=repmat(Rk./R,2,1).* MyCenter(Z);
>> ShowAll(Z(1:10000),'r','k'),daspect([1,1,1])
```

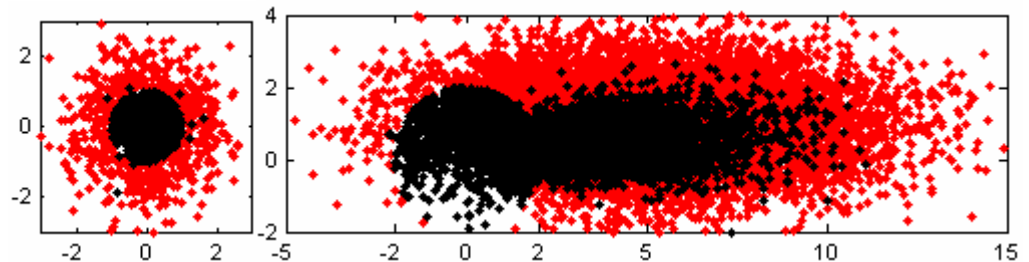


Рис. 9.12. Баллистическое рассеивание точек попадания (красные точки) и результаты однократной коррекции промаха (черные точки)

На рис. 9.12 показаны первые 1000 точек кругового и эллиптического распределений до и после коррекций. Зоны высокоплотных попаданий образуют пятно диаметром  $a$ . Так как при эллиптическом рассеивании большие промахи по одному из главных направлений не выбираются, в этом направлении наблюдается вытянутое уплотнение точек, напоминающее хвост кометы.

### Объектные функции случайных величин

**Преимущества  
объектного  
моделирования  
функций СВ**

Процедурная реализация функций СВ удобна, если процесс хоть и сложен, но алгоритмизуемый. Обычно таким образом удастся описать выделенную часть ситуации, в которой оценивается эффективность, и получить соответствующий промежуточный результат. Так, модель коррекции траектории можно оптимизировать по вероятности попадания в заданную область. Но это не критерий эффективности, которая определяется взаимодействием системы объектов, не всегда поддающимся алгоритмизации.

**Пример 12: одно-  
мерное перекрытие**

На полосу шириной  $h$  брошен круг диаметром  $d$  так, что случайное расстояние  $X$  центра круга от средней линии полосы подчиняется нормальному закону с параметрами  $m_x, \sigma_x$ . Если  $d < h$ , возможные значения СВ  $Y$  – заключены в интервале  $[0, d]$ , причем величина перекрытия имеет наибольшее значение при  $|x| < (h - d)/2 = a$  и уменьшается до нуля при возрастании  $|x|$  вплоть до значения  $b = (h + d)/2$  (рис. 9.9):

$$y = \begin{cases} 0, & |x| > b, \\ b - |x|, & a < |x| < b, \\ d, & a < |x|. \end{cases}$$

В интервалах  $a < |x| < b$  функция  $\varphi(x) = b - |x|$  имеет двузначную обратную  $\psi(y)$  при  $0 < y < d$ :

$$\varphi(x) = \begin{cases} b + x, & -a > x > -b, \\ b - x, & a < x < b. \end{cases}$$

$$x_1 = \psi_1(y) = y - b, \quad \psi_1'(y) = 1,$$

$$x_2 = \psi_2(y) = b - y, \quad \psi_2'(y) = -1.$$

Выполнив подстановку в (10.24), получим плотность распределения величины линейного перекрытия внутри интервала  $[0, d]$ :

$$f_Y(y) = f_X(y - b) + f_X(b - y), \quad 0 < y < d.$$

Функцию распределения  $F_Y(y)$  внутри интервала  $[0, d]$  с учетом того, что события  $(Y < y)$  и  $(Y < \psi_1(y)) + (Y > \psi_2(y))$  эквивалентны:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ F_X(\psi_1(y)) + [1 - F_X(\psi_2(y))], & 0 < y < d. \\ 1, & y \geq d. \end{cases}$$

Воспользовавшись стандартной функцией нормального распределения, получим:

$$F_Y(y) = \Phi^*\left(\frac{y - b - m_x}{\sigma_x}\right) + 1 - \Phi^*\left(\frac{b - y - m_x}{\sigma_x}\right), \quad 0 < y < d.$$

На концах интервала  $F_Y(0) = 0$ ,  $F_Y(d^+) = 1$ . Значит, в этих точках функция распределения имеет разрывы первого рода:

$$P(Y = 0) = p_0 = F_Y(0^+) - F_Y(0) = 1 - \left[ \Phi^*\left(\frac{b - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi^*\left(\frac{-b - m_x}{\sigma_x}\right) \right],$$

$$P(Y = d) = p_1 = F_Y(d^+) - F_Y(d) = \Phi^*\left(\frac{a - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi^*\left(\frac{-a - m_x}{\sigma_x}\right).$$

Введем исходные данные  $m_x = 10$ ,  $\sigma_x = 15$ ,  $d = 30$ ,  $h = 50$ , построим расчетную сетку, вычислим на ней плотность и функцию распределения СВ  $Y$ , построим их графики (рис. 9.11):

```
>> X=Norm_1(10,15);d=30;h=50;b=(h+d)/2;y=0:d;
>> ff=f(X,y-b)+f(X,b-y); F=fun(X,y-b)+1-fun(X,b-y);
>> plot(y,ff*30,[0.1, y, d*1.0001, d*1.1],[0,F,1,1]), grid
```

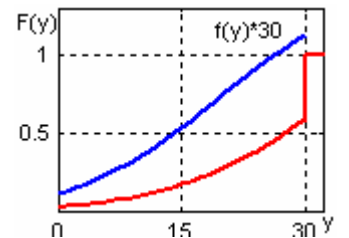


Рис. 9.11. Распределение линейного перекрытия

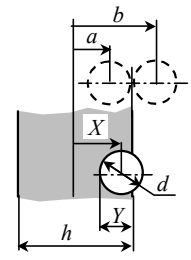


Рис. 9.10. Перекрытие полосы

## Программа верификации кода MATLAB

```

clear all
a=1;b=2;c=3;M=(a*c+b*c+b*a)/2
M=dblquad(@(f,t)
(a*c*sin(f)+b*(a*sin(t)+c*cos(t))*cos(f)).*cos(f)/(2*pi),0,pi/2,0,pi/2)*4
a2=dblquad(@(f,t)
(a*c*sin(f)+b*(a*sin(t)+c*cos(t))*cos(f)).^2.*cos(f)/(2*pi),0,pi/2,0,pi/2)*4;
a=sqrt(11*2/6);b=a;c=a;
M=dblquad(@(f,t)
(a*c*sin(f)+b*(a*sin(t)+c*cos(t))*cos(f)).*cos(f)/(2*pi),0,pi/2,0,pi/2)*4
a2=dblquad(@(f,t)
(a*c*sin(f)+b*(a*sin(t)+c*cos(t))*cos(f)).^2.*cos(f)/(2*pi),0,pi/2,0,pi/2)*4;
D=a2-M^2,sigma=sqrt(D)

clear all
Sy='I1=-4:0.01:-a; I2=-a:0.01:a;I3=a:0.01:4;I=[I1,I2,I3]';
Sf='fy=[f(X,I1-a),f(X,I2-a)+f(X,I2+a),f(X,I3+a)];Dy=Trap(I.^2.*fy,I)';
X=Norm_1(0,1);a=sqrt(2/pi);eval(Sy);eval(Sf);plot(I,fy,'k',I,f(X,I),'g--');hold on
T=[-1 1]; J=find(I>T(1) & I<T(2)); p=Trap(fy(J),I(J))
a=a/2; eval(Sy);eval(Sf); plot(I,fy,'r');
J=find(I>T(1)&I<T(2)); p=Trap(fy(J),I(J))
a=2; eval(Sy);eval(Sf); plot(I,fy,'b'); J=find(I>T(1)&I<T(2));
p=Trap(fy(J),I(J))
N=100000;Z=Gen(X,N);I1=find(Z<0);I2=find(Z>0); d= Gen('rnd',-0.3,0.3,N);
z(I1)=Z(I1)+a;z(I2)=Z(I2)-a;[Fz,fz]=SmartHist(z);Show(fz,'b--')
L=find(fz.x>T(1) & fz.x<T(2));p=Trap(fz.f(L),fz.x(L))
z(I1)=Z(I1)+a+d(I1);z(I2)=Z(I2)-a-d(I2);[Fz,fz]=SmartHist(z);Show(fz,'b')
Sy='I1=-4:0.01:-a+e; I2=-a+e:0.01:-e;I3=-e:0.01:e;I4=e:0.01:a-e;I5=a-
e:0.01:4;I=[I1,I2,I3,I4,I5]';
Sf='fy=[f(X,I1-a),f(X,I2-a)+f(X,I2+a),f(X,I3-a)+f(X,I3)+f(X,I3+a),f(X,I4-
a)+f(X,I4+a),f(X,I5+a)];Dy=Trap(I.^2.*fy,I)';
e=0.3;a=sqrt(2/pi);eval(Sy);eval(Sf);figure,plot(I,fy,'r',I,f(X,I),'g--');
Sy='I1=0:0.001:e; I2=e:0.001:a-e;I3=a-e:0.1:4;I=[I1,I2,I3]'; s=1;
Sf='fy=[f_Rayl(I1,s)+f_Rayl(I1+a,s)+f_Rayl(a-I1,s),f_Rayl(I2+a,s)+f_Rayl(a-
I2,s),f_Rayl(a+I3,s)];';
figure,hold on,c='bkrghcm';
for a=0:0.5:2.5 e=a/2;eval(Sy);eval(Sf);m=Trap(fy.*I,I);D=Trap(fy.*I.^2,I)-
m^2;[a,m,D],plot(I,fy,c(a*2+1)),end
X=Norm_2([1 1]); N=100000; Z=Gen(X,N);R=Distance(Z); a=2;
Ind=find(R>a/2);Rk=R;Rk(Ind)=abs(R(Ind)-a);Y= repmat(Rk./R,2,1).* MyCenter(Z);
m=mean(Rk),sig=std(Rk);D=sig^2, ShowAll(Z,'r.',Y,'k.')

X=Norm_2([3 1]); N=100000; Z=Gen(X,N); R=Distance(Z); a=4;
Ind=find(R>a/2);Rk=R;Rk(Ind)=abs(R(Ind)-a);Y= repmat(Rk./R,2,1).* MyCenter(Z);
ShowAll(Z(1:10000),'r.',Y(:,1:10000),'k.'),daspect([1,1,1])

clear all
X=Norm_1(10,15);d=30;h=50;b=(h+d)/2;y=0:d;
ff=f(X,y-b)+f(X,b-y); F=fun(X,y-b)+1-fun(X,b-y);
plot(y,ff*30,[-0.1, y, d*1.0001, d*1.1],[0,F,1,1]), grid

```

## Контрольные вопросы

1. На чем основан практический интерес к функциям случайных величин?
2. Как вычислить числовые характеристики функции случайных величин, не располагая ее законом распределения?
3. Система  $n$  случайных величин характеризуется вектором математических ожиданий  $M$  и корреляционной матрицей  $K$ . Как найти дисперсию суммы этих случайных величин?
4. Как выразить дисперсию объема параллелепипеда через числовые характеристики его независимых случайных размеров?
5. Как можно вычислить математическое ожидание и дисперсию слабо нелинейной функции  $Y = \varphi(X_1, \dots, X_n)$  системы  $n$  случайных величин?
6. Каким соотношением связана плотность распределения монотонной функции случайной величины с законом распределения аргумента?
7. Запишите в общем виде выражение, связывающее плотность распределения немонотонной функции случайной величины с законом распределения аргумента.
8. Запишите в общем виде выражение для функции распределения системы двух случайных величин.