Лекция 8

Система произвольного числа случайных величин

Законы распределения систем случайных величин

Системы двух СВ – частный случай многомерных случайных векторов, вероятностный смысл которых не зависит от числа компонент. В отличие от системы двух СВ, проекции многомерных систем также могут быть системами (*подсистемами*).

Функция распределения системы СВ

Функция распределения $F(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n)$ неотрицательна, монотонно возрастает по каждому аргументу, обращается в ноль, если хотя бы один аргумент меньше нижнего предела возможных значений, порождает частные распределения на бесконечных значениях остальных СВ:

$$F(x_1, \ldots, -\infty, \ldots x_n) = 0,$$
$$F(x_1, \infty, \ldots, \infty) = P(X_1 < x_1) = F_1(x_1),$$
$$\ldots$$
$$F(\infty, \ldots, \infty, x_n) = P(X_n < x_n) = F_n(x_n).$$

Кроме частных одномерных распределений в системе n СВ можно выделить *подсистемы*. Например, в системе $(X_1, \ldots, X_n)$ можно выделить подсистему $(X_1, \ldots, X_k)$, описываемую частной функцией распределения:

$$F(x_1, \ldots, x_k, \infty, \ldots, \infty) = P(X_1 < x_1, \ldots, X_k < x_k) = F_{1\ldots k}(x_1, \ldots, x_k).$$

Плотность распределения системы непрерывных СВ

Системы непрерывных СВ имеют непрерывную и дифференцируемую по всем аргументам функцию распределения и смешанную частную производную – совместную плотность распределения системы:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}, \tag{8.1}$$

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} (n) \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n, \tag{8.2}$$

Функция совместной плотности порождает частные распределения

$$f_i(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} (n-1) \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n,$$

плотности совместного распределения подсистем

$$f_{1\ldots k}(x_1, \ldots, x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} (n-k) \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n) dx_{k+1} \ldots dx_n,$$

а также условные законы распределения подсистем при фиксированных значениях остальных компонент:

$$f(x_1, \ldots, x_k \mid x_{k+1}, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{f_{k+1\ldots n}(x_{k+1}, \ldots, x_n)}. \tag{8.3}$$

Теорема умножения плотностей

Подсистема $(X_1, \ldots, X_k)$ независима от остальных СВ системы, если ее условный и частный законы распределения совпадают. Тогда совместная плотность системы равна произведению частных законов распределения:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=f_{1\ldots k}(x_1,\ldots,x_k)f_{k+1\ldots n}(x_{k+1},\ldots,x_n). \qquad (8.4)$$

В системе независимых СВ ($X_1,\ldots, X_n$) любая подсистема не зависит от остальных СВ и подсистем. Только в этом случае закон распределения системы получается как произведение плотностей отдельных СВ:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=f_1(x_1)\cdots f_n(x_n). \qquad (8.5)$$

Числовые характеристики многомерных распределений

Наглядное и часто вполне достаточное представление о системах СВ дают их числовые характеристики. В системе ($X_1,\ldots, X_n$) можно определить:

а) n комплектов числовых характеристик отдельных СВ

$$M[X_i]=\int_{-\infty}^{\infty}(n)\int_{-\infty}^{\infty}x_i f(x_1,\ldots x_n)dx_1\cdots dx_n, \qquad (8.6)$$

$$\alpha_k[X_i]=M[X_i^k],\ \ \mu_k[X_i]=M[(X_i-M[X_i])^k]; \qquad (8.7)$$

б) числовые характеристики условных распределений отдельных СВ

$$M[X_1\mid x_2,\ldots x_n]=\int_{-\infty}^{\infty}x_1 f(x_1\mid x_2,\ldots,x_n)dx_1, \qquad (8.8)$$

$$D[X_1\mid x_2,\ldots x_n]=M[\dot{X}_1^2\mid x_2,\ldots x_n], \qquad (8.9)$$

где $\dot{X}=X-M[X_1\mid x_2,\ldots,x_n]$, и т.д. для всех условных распределений;

в) числовые характеристики всевозможных подсистем, главным образом, вторые смешанные моменты между парами СВ:

$$K_{ij}=M[\dot{X}_i\dot{X}_j],\ i,j=1,\ldots,n. \qquad (8.10)$$

Корреляционная матрица

МО каждой СВ системы входят в вектор МО, а дисперсии и ковариации между каждой парой СВ – в симметричную корреляционную матрицу K с $n(n+1)/2$ неповторяющимися элементами K_{ij}, i =1, …, n; $j = i$, …, m:

$$\overline{m}=\begin{bmatrix}m_1\\ \cdots\\ m_n\end{bmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}K_{11}&\cdots&K_{1n}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ K_{n1}&\cdots&K_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D_1&K_{12}&\cdots&K_{1n}\\ &D_2&\cdots&K_{2n}\\ &&\cdots&\cdots\\ &&&D_n\end{pmatrix}.$$

Матрица коэффициентов корреляции

Все диагональные элементы *матрицы коэффициентов корреляции* единичные: $r_{ii}=\dfrac{K_{ii}}{\sqrt{D_iD_i}}=1$, $i=1,\ldots,n$. Остальные $n(n-1)/2$ независимых элементов r_{ij}, $i<j$ (выше диагонали) имеют значения в интервале (–1, 1). По расположению ненулевых элементов в матрице коэффициентов корреляции можно судить о зависимости не только между парами, но и между подсистемами СВ. Например, в системе ($X_1,\ldots, X_5$) с матрицей

$$r_{ij}=\begin{pmatrix}1&r_{12}&r_{13}&0&0\\ &1&r_{23}&0&0\\ &&1&0&0\\ &&&1&r_{45}\\ &&&&1\end{pmatrix}$$

подсистемы (X_1, X_2, X_3) и (X_4, X_5) взаимно *некоррелированы*, хотя могут быть зависимыми, если $f(x_1,\ldots, x_5)\neq f_{123}(x_1, x_2, x_3)\, f_{45}(x_4, x_5)$.

Взаимная ковариационная матрица

Для двух случайных векторов $X = (X_1,\ldots, X_n)$, $Y = (Y_1,\ldots, Y_m)$ кроме корреляционных матриц K^X, K^Y, квадратных и симметричных, характеризующих зависимость между компонентами этих векторов, можно ввести *взаимную ковариационную матрицу* $K^{(X)(Y)}$ с элементами $K_{ij}^{(X)(Y)} = M[\dot{X}_i\dot{Y}_j]$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Эта прямоугольная матрица даже при $n = m$ не обязательно симметрична, так как $M[\dot{X}_i\dot{Y}_j] \neq M[\dot{X}_j\dot{Y}_i]$.

Два случайных вектора некоррелированы, если все элементы взаимной ковариационной матрицы нулевые. Векторы $X = (X_1,\ldots, X_n)$ и $Y = (Y_1,\ldots, Y_m)$ независимы, если все подсистемы одного из них не зависят ни от одной из подсистем другого. В этом случае

$$f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) = f_X(x_1,\ldots,x_n) f_Y(y_1,\ldots,y_m).$$

Пару случайных векторов $\overline{X},\overline{Y}$ характеризуют векторы $M[\overline{X}]$, $M[\overline{Y}]$, корреляционные матрицы K^X, K^Y и взаимная ковариационная матрица $K^{(X)(Y)}$.

Теорема о сумме некоррелированных случайных векторов

Если размерность векторов $\overline{X},\overline{Y}$ одинакова ($n = m$), имеет смысл их сумма $\overline{Z}=\overline{X}+\overline{Y}$. Вектор МО суммы случайных векторов равен сумме их МО

$$M[\overline{Z}] = M[\overline{X}+\overline{Y}] = M[\overline{X}] + M[\overline{Y}].$$

Корреляционная матрица некоррелированных случайных векторов равна сумме корреляционных матриц слагаемых векторов

$$K[\overline{Z}] = K[\overline{X}+\overline{Y}] = K[\overline{X}] + K[\overline{Y}], \qquad (8.11)$$

так как с учетом некоррелированности $M[\dot{X}_i\dot{Y}_j] = 0,\ i, j = 1,\ldots, n$ выполняются поэлементные равенства:

$$K_{ij}^Z = M[\dot{Z}_i\dot{Z}_j] = M[(\dot{X}_i + \dot{Y}_i)(\dot{X}_j + \dot{Y}_j)] = M[\dot{X}_i\dot{X}_j + \dot{Y}_i\dot{X}_j + \dot{X}_i\dot{Y}_j + \dot{Y}_i\dot{Y}_j)] =$$
$$= M[\dot{X}_i\dot{X}_j] + M[\dot{Y}_i\dot{Y}_j)] = K_{ij}^X + K_{ij}^Y,\ i, j = 1,\ldots,n.$$

На основании этой теоремы определяют суммарное влияние ошибок стрельбы, обусловленных группами независимых случайных факторов.

Кучность определяют ошибки, различные и, как правило, *независимые* в каждом отдельном выстреле. К ним относятся *баллистические ошибки*, вызванные отклонениями баллистических характеристик от номинальных значений (массы, формы, размеров, начальной скорости), и *технические ошибки* вносимые возмущениями при отделении снаряда от орудия, колебательниями ствола и т.п. Чем меньше эти ошибки, тем ближе друг к другу расположены траектории снаряда. Но задача стрельбы не в относительной близости точек попадания (траекторий), а в их близости к цели. Центр группирования точек попадания имеет случайное отклонение от точки прицеливания, *одинаковое для всех выстрелов* очереди, так как возникает на этапе *подготовки стрельбы* при определении положения и параметров движения цели, осуществлении наводки. Под меткостью стрельбы понимают степень близости центра группирования к точке прицеливания.

Существует оптимальное соотношение между характеристиками групповых и индивидуальных ошибок стрельбы. На рис. 8.3 показаны результаты статистического моделирования рассеивания двадцати выстрелов из одного орудия. В первом случае (*а*) индивидуальное рассеивание в два раза больше группового, при случайной реализации групповой ошибки не отмечено ни одного попадания внутрь прямоугольника 3×5:

```
>> R=Rect([3,5]);Show(R), hold on
```

```
>> Xg=Norm_2([2,3]);Xi=Xg*2; X=Xi+Gen(Xg,1);n=20; Z=Gen(X, n); ShowAll(Z,'.',Xg)
```

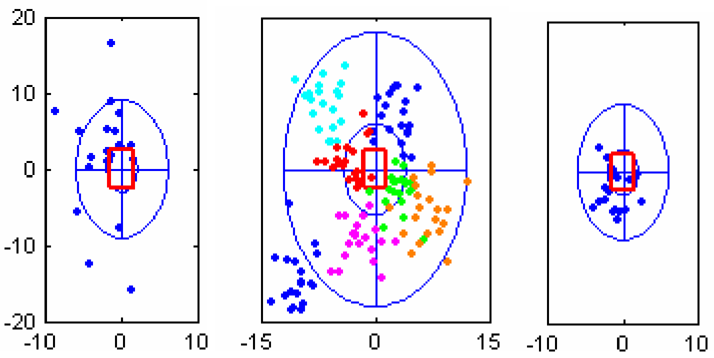

Рис. 8.3. Рассеивание по схеме двух групп ошибок

Улучшение кучности в два раза при таком же увеличении групповых ошибок (*б*) привело к тому, что из семи серий по 20 выстрелов только в одной отмечено одно попадание в прямоугольник (вторая команда выполнена 7 раз):

```
>> Xi=Xg; Xg=Xi*2; ShowAll( Xg, R, 'r' )
>> X=Xi+Gen(Xg,1);Z=Gen(X, n); Show(Z,'.')
```

Одновременное улучшение кучности и меткости (*в*) дает высокую точность стрельбы:

```
>>  Xg=Norm_2([2,3]); Xi=Xg;  X=Xi+Gen(Xg,1);Z=Gen(X, n); ShowAll(Z,'.', Xg, R, 'r')
```

Схема двух групп ошибок

Ошибки стрельбы удобно исследовать в главных осях рассеивания, тогда компоненты случайных векторов независимы. Пусть $\boldsymbol{X}_{\text{г}}$ – n-мерный вектор, компонентами которого являются групповые ошибки по одному из главных направлений (по дальности) в каждом из n выстрелов, $\boldsymbol{X}_{\text{и}}$ – n-мерный вектор индивидуальных ошибок. Ошибки рассеивания не зависят от ошибок подготовки, так как обусловлены другими факторами, поэтому суммарный вектор отклонений по дальности $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_{\text{г}} + \boldsymbol{X}_{\text{и}}$ представляет собой сумму двух независимых случайных векторов, и, следовательно, его корреляционная матрица равна сумме корреляционных матриц слагаемых векторов. Ввиду того, что среди определяющих факторов нет превалирующих, эти случайные векторы подчиняются нормальному закону. Компоненты вектора $\boldsymbol{X}_{\text{г}}$ одинаковы и характеризуются СКО групповых ошибок $\sigma_{\text{г}}$, а значит и элементы корреляционной матрицы одинаковы: $K_{ij}^{(X_{\text{г}})} = M[X_{\text{г}i}X_{\text{г}j}] = D_{\text{г}i} = \sigma_{x\text{г}}^2$. Индивидуальные ошибки в каждом выстреле независимы, поэтому корреляционная матрица $K^{(X\text{и})}$ имеет диагональный вид: $K_{ii}^{(X_{\text{и}})} = D_{\text{и}i} = \sigma_{x\text{г}}^2$, $K_{ij}^{(X_{\text{и}})} = 0, i \neq j$. Согласно теореме о корреляционной матрице суммы независимых случайных векторов

$$K^{(X)} = \begin{pmatrix} \sigma_{x\text{ã}}^2 & \cdots & \sigma_{x\text{ã}}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{x\text{ã}}^2 & \cdots & \sigma_{x\text{ã}}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{x\text{è}}^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{x\text{è}}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{x\text{ã}}^2 + \sigma_{x\text{è}}^2 & \cdots & \sigma_{x\text{ã}}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{x\text{è}}^2 & \cdots & \sigma_{x\text{ã}}^2 + \sigma_{x\text{è}}^2 \end{pmatrix}. \quad (8.12)$$

Условия стрельбы, которым соответствует корреляционная матрица ошибок (8.12), называются *схемой двух групп ошибок*. Для нее характерно, что степень зависимости одинакова между любой парой выстрелов в серии:

$$r^{(X)} = \begin{pmatrix} 1 & r_x & \cdots & r_x \\ r_x & 1 & \cdots & r_x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_x & r_x & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \text{ где } r_x = \frac{\sigma_{x\text{г}}^2}{\sigma_{x\text{г}}^2 + \sigma_{x\text{и}}^2}. \quad (8.13)$$

Коэффициент корреляции между выстрелами

Матрица $r^{(X)}$ характеризует зависимость между ошибками по дальности, точно так же можно получить матрицу $r^{(Z)}$ коэффициентов корреляции между ошибками в боковом направлении $r_z = \dfrac{\sigma_{z\text{г}}^2}{\sigma_{z\text{г}}^2 + \sigma_{z\text{и}}^2}$. Общую корреляцию между ошибками вычисляют как среднее геометрическое:

$$r = \sqrt{r_x r_z}\ . \tag{8.14}$$

В теории стрельбы вместо СКО используют срединные (вероятные) отклонения. Обозначив $E_{x\text{г}} = \rho\sqrt{2}\sigma_{x\text{г}}, E_{z\text{г}} = \rho\sqrt{2}\sigma_{z\text{г}}$ срединные отклонения групповых ошибок, $\text{В}_\text{д} = \rho\sqrt{2}\sigma_{x\text{и}}, \text{В}_\text{б} = \rho\sqrt{2}\sigma_{z\text{и}}$ – индивидуальные ошибки по дальности и в боковом направлении, а $E_x = \sqrt{E_{x\text{г}}^2 + \text{В}_\text{д}^2}, E_z = \sqrt{E_{z\text{г}}^2 + \text{В}_\text{б}^2}$ – суммарные ошибки, выразим через них коэффициенты корреляции по направлениям:

$$r_x = \frac{E_{x\text{г}}^2}{E_{x\text{г}}^2 + \text{В}_\text{д}^2} = \frac{E_{x\text{г}}^2}{E_x^2},\ r_z = \frac{E_{z\text{г}}^2}{E_{z\text{г}}^2 + \text{В}_\text{б}^2} = \frac{E_{z\text{г}}^2}{E_z^2}\,. \tag{8.15}$$

Возможные результаты стрельбы при двух группах ошибок

Повторяющиеся и индивидуальные ошибки вносят свой вклад в суммарную дисперсию равноправным образом, для увеличения вероятности попадания в одном выстреле нужно уменьшать дисперсии как индивидуальных так и повторяющихся ошибок:

$$p_1 = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_z}\iint_D e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{z^2}{\sigma_z^2}\right)}dxdz\,,\quad \text{где } \sigma_z^2 = \sigma_{z\text{г}}^2 + \sigma_{z\text{и}}^2,\ \sigma_x^2 = \sigma_{x\text{г}}^2 + \sigma_{x\text{и}}^2\,.$$

Когда возможности уменьшения ошибок исчерпаны, приемлемую вероятность попадания в малоразмерную цель можно обеспечить за счет увеличения числа выстрелов. Вероятность хотя бы одного попадания в *n независимых* выстрелах растет вместе с n по степенному закону $p_n^{(0)} = 1-(1-p_1)^n$, зависимость между выстрелами ослабляет этот рост. Дисперсии индивидуальных и повторяющихся ошибок входят в корреляционную матрицу так, что попытка уменьшить только индивидуальное рассеивание приводит к увеличению коэффициента корреляции. В пределе при $\sigma_{x\text{и}} = 0$ из (8.13) следует, что $r_x = 1$, и хотя вероятность попадания в одном выстреле p_1' увеличится благодаря снижению общего СКО $\sigma_x = \sigma_{x\text{г}}$, она останется такой же и в n выстрелах ($p_n^{(1)} = p_1'$), так как все снаряды с одинаковой групповой ошибкой летят по одной траектории. Покажем, что $p_n^{(1)} < p_n^{(r)} < p_n^{(0)}$.

Сравнение вероятностей попадания в полосу

Вероятность попадания в бесконечно длинную полосу шириной $h = 6$, расположенную перпендикулярно направлению стрельбы, определяется рассеиванием по дальности с ошибками $X_\text{г} \in N(0, 8)$, $X_\text{и} \in N(0, 8)$. Вычислим для сравнения p_1, p_1' и $p_n^{(0)}$ при $n = 10$:

```
>> Xg=Norm_1(0,8); Xi=Xg; X=Xg+Xi; T=[-3,3];n=10;
>> p1=Ver(X,T),P1=Ver(Xg,T),P0=1-(1-p1)^n
p1 =   0.2091  P1 =   0.2923  P0 =   0.9043
```

Устранение индивидуальных ошибок привело к увеличению вероятности попадания в одном выстреле с $p_1 = 0{,}21$ до $p_1' = 0{,}29$. В десяти выстрелах, если считать их независимыми, вероятность хотя бы одного попадания возросла бы до $p_{10}^{(0)} = 0{,}90$. Но при корреляции $r_x = 64/128 = 0{,}5$, эта оценка завышена. Чтобы узнать насколько, проведем статистический эксперимент и по его результатам оценим $p_{10}^{(0,5)}$.

Статистическое моделирование схемы двух групп ошибок

$$A=\begin{bmatrix} X_{11}\cdots X_{1n} \\ \cdots \\ X_{N1}\cdots X_{Nn}\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$P \qquad\qquad P\_r$$

Рис. 8.4

Имитацию одномерного нормального рассеивания по схеме двух групп ошибок выполним с помощью генератора случайных реализаций Gen в классе Norm_1. Разыграем N = 100000 серий по n = 10 выстрелов с характеристиками индивидуального рассеивания Xi и групповых ошибок Xg, сложим матрицу N×n реализаций индивидуальных ошибок и n столбцов N×1 одинаковых в каждом выстреле групповых ошибок:

```
>> N=100000;A=Gen(Xi,N,n)+repmat(Gen(Xg,N,1),1,n);
```

Элементы характеристического массива попаданий U равны единице или нулю в зависимости от того, произошло попадание в цель в данном выстреле или нет, а его среднее арифметическое является оценкой вероятности попадания в одном выстреле:

```
>> U=zeros(size(A));U(A>min(T) & A<max(T))=1; P=mean2(U)
P =    0.2090
```

Оценка практически совпадает с точным значением p1 = 0.2091. Оценку вероятности хотя бы одного попадания в n выстрелах вычислим как отношение числа строк, содержащих хотя бы один единичный элемент, к общему числу испытаний N:

```
>> P_r=sum(sum(U,2)>0)/N
P_r =    0.8431
```

Итак, вероятность хотя бы одного попадания в зависимых выстрелах с коэффициентом корреляции $r = 0,5$ меньше той, которая вычислена в предположении независимости выстрелов 0.9043. Убедимся, что матрица выборочных коэффициентов корреляции между столбцами матрицы A (ошибками выстрелов) соответствует $r = 0,5$. Воспользуемся для этого функцией CorrelCoef(A), текст которой приведен в Листинге 4.1 (Приложение к Лекции 4):

```
>> R=CorrelCoef(A)
R = 1.0000  0.5000  0.5019  0.5000  0.4996  0.4994  0.5016  0.4961  0.5012  0.4984
    0.5000  1.0000  0.5023  0.4997  0.5016  0.4990  0.4986  0.5006  0.4985  0.4977
    0.5019  0.5023  1.0000  0.5002  0.4982  0.4989  0.5012  0.5016  0.5003  0.4973
    0.5000  0.4997  0.5002  1.0000  0.4980  0.5007  0.5011  0.4963  0.5001  0.4988
    0.4996  0.5016  0.4982  0.4980  1.0000  0.4988  0.5033  0.4984  0.5000  0.4988
    0.4994  0.4990  0.4989  0.5007  0.4988  1.0000  0.4997  0.4965  0.5028  0.4950
    0.5016  0.4986  0.5012  0.5011  0.5033  0.4997  1.0000  0.5032  0.5013  0.5004
    0.4961  0.5006  0.5016  0.4963  0.4984  0.4965  0.5032  1.0000  0.5011  0.4983
    0.5012  0.4985  0.5003  0.5001  0.5000  0.5028  0.5013  0.5011  1.0000  0.4968
    0.4984  0.4977  0.4973  0.4988  0.4988  0.4950  0.5004  0.4983  0.4968  1.0000
```

Результат подтверждает основной признак схемы двух групп ошибок: недиагональные элементы матрицы выборочных коэффициентов корреляции практически одинаковы и близки к точному значению $r = 0,5$.

Вероятность попадания в цель

Вероятность попадания в полосу при зависимых выстрелах

Групповая ошибка случайна, но одинакова для всех выстрелов. Это значит, что при реализовавшейся (*фиксированной*) групповой ошибке выстрелы независимы, потому что рассеивание определяют только индивидуальные ошибки. Условную вероятность хотя бы одного попадания при n выстрелах можно определять по формуле $R_{1,n}(x_г) = 1 - (1 - p_1(x_г))^n$, где $p_1(x_г)$ – вероятность попадания в цель при фиксированном центре группирования $x_г$:

$$p_1(x_г) = \int_{-h/2}^{h/2} f(x|x_г)dx\,.$$

Условная плотность распределения представляет собой нормальный закон с характеристиками индивидуального рассеивания с учетом смещения центра группирования на фиксированную величину $x_г$:

$$f(x|x_г) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{xи}} e^{-\frac{(x-m_x-x_г)^2}{2\sigma_{xи}^2}}\,.$$

Вероятность хотя бы одного попадания в n зависимых выстрелах можно вычислить по интегральной формуле полной вероятности:

$$p_n^{(r)} = \int_{-\infty}^{\infty} R_1(x_г) f_г(x_г) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \left(1 - p_1(x_г)\right)^n\right] f_г(x_г) dx\,. \qquad (8.16)$$

Точное значение вероятности хотя бы одного попадания в полосу T в n = 10 выстрелах вычислим по формуле (8.16) с помощью электронной формулы Trap и метода Norm_1/Ver:

```
>> x=Net(Xg); p=1-(1-Ver(Xi+x,T)).^n; Pr=Trap(p.*f(Xg,x),x)
Pr =    0.8433
```

Теоретически обоснованный результат вычисления подтвердил ранее полученную статистическую оценку P_r = 0.8431.

Вероятность поражения цели в зависимых выстрелах при одномерном рассеивании

Вероятностью хотя бы одного попадания можно оценивать эффективность действия по целям, для поражения которых достаточно одного попадания. В остальных случаях нужно учитывать уязвимость цели, которую характеризует условный закон поражения $G(m)$. В формуле для вероятности поражения при фиксированной групповой ошибке

$$W_n(x_г) = \sum_{m=1}^{n} p_{m,n}(x_г) G(m)\,,$$

вероятности гипотез определяются по биномиальной формуле с вероятностью успеха $p_1(x_г)$. По интегральной формуле полной вероятности получим вероятность поражения цели в n зависимых выстрелах:

$$W_n^{(r)} = \int_{-\infty}^{\infty} W_n(x_г) f_г(x_г) dx\,. \qquad (8.17)$$

Вычисление вероятности поражения в зависимых выстрелах

Электронная формула W_r_n(Xg, Xi, T, n, G) (Листинг 8.1) предназначена для вычислений по формуле (8.17). Она получает объекты Xg, Xi, представляющие групповые и индивидуальные ошибки, объект T, представляющий геометрию цели (в данном случае интервал интегрирования), а также массив условных вероятностей поражения G. При независимых событиях пражения условный закон определяется вероятностью поражения в одном попадании: $G(m) = 1-(1-r_1)^n$. В таком случае вместо массива G достаточно задать r_1. Если последний аргумент функции не задан, вычисляется вероятность хотя бы одного пападания. Вычислим вероятность хотя бы одного попадания и поражения при $r_1 = 0{,}3$:

```
>> P=W_r_n(Xg,Xi,T,n), W=W_r_n(Xg,Xi,T,n,0.3),wr=W_r_n(Xg,Xi,T,n,1-(1-0.3).^(1:n))
P =  0.8433     W =  0.4604     wr =  0.4604
```

Циклически измененяя СКО индивидуального рассеивания от 0 до 16 (умножением $\sigma_{xи}$ на массив коэффициентов от 0 до 2), будем уменьшать коэффициент корреляции согласно (8.13) от 1 до $1/(1+4) = 0{,}2$, чтобы построить график зависимости от r вычисленной с помощью функции W_r_n вероятности хотя бы одного попадания $p_n^{(r)}$ (рис. 8.5):

```
>> n=10;N=50;s=linspace(0,2,N);for i=1:N [p(i),r(i)]=W_r_n(Xg,Xi*s(i),T,n);end, plot(r,p)
```

С усилением корреляции вероятность хотя бы одного попадания резко снижается (синяя кривая), а наличие экстремума при $r = 0{,}5$ объясняется тем, что коэффициент корреляции изменялся за счет уменьшения индивидуального СКО (и, соответственно, суммарного). Построим ту же зависимость при постоянстве суммарного СКО за счет компенсирующего изменения группового СКО. Из (8.13) следует, что при равных базовых значениях $\sigma_{xг}$ и $\sigma_{xи}$, для сохранения постоянного суммарного СКО при изменении $\sigma_{xи}$ в s раз нужно изменить $\sigma_{xи}$ в $\sqrt{2-s^2}$ раз:

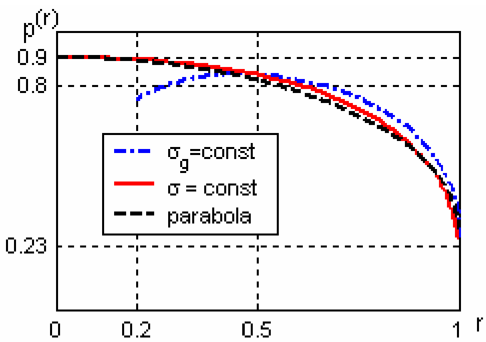

Рис. 8.5. Влияние корреляции на вероятность хотя бы одного попадания

```
>> S=linspace(0.01,1.4,N);
>> i=1;for s=S [p(i),r(i)]=W_r_n(Xg*sqrt(2-s^2),Xi*s,T,n);i=i+1;end, hold on, plot(r,p,'r')
```

Сплошная кривая на рис. 8.5 показывает монотонное снижение вероятности от $p_n^{(0)} = 0{,}90$ до $p_n^{(1)} = 0{,}23$ с ростом корреляции. Кривая близка к параболе, поэтому в приближенных расчетах эту зависимость вычисляют по формуле:

$$W_n^{(r)} = W_n^{(1)} + \sqrt{1-r^2}\left(W_n^{(0)} - W_n^{(1)}\right). \qquad (8.18)$$

Построим по этой формуле еще одну кривую (пунктирную), чтобы убедиться в правомерности приближения по формуле (8.18):

```
>> R=0:0.01:1; Q=P1+sqrt(1-R.^2)*(P0-P1);plot(R,Q,'--')
```

Вероятность поражения цели при плоском рассеивании

В общем случае стрельбы проекция цели на картинную плоскость занимает некоторую двумерную область D. При m попаданиях в нее цель поражается с условной вероятностью $P(A|m) = G(m)$. Определив условную вероятность попадания в цель одним выстрелом

$$p_1(x_г, z_г) = \int_D f(x, z \mid x_г, z_г)\,dxdz\,, \qquad (8.19)$$

найдем условную вероятность m попаданий при n выстрелах по формуле Бернулли (поскольку групповая ошибка фиксирована)

$$p_{m,n}(x_г, z_г) = C_n^m\, p_1(x_г, z_г))^m (1 - p_1(x_г, z_г))^{n-m}.$$

Условную вероятность поражения цели при фиксированной групповой ошибке определим по формуле:

$$W_n(x_г, z_г) = \sum_{m=1}^{n} p_{m,n}(x_г, z_г) G(m)\,.$$

Вероятность поражения цели в n выстрелах найдем по интегральной формуле полной вероятности

$$W_n = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_n(x_г, z_г) f_г(x_г, z_г)\,dx_г dz_г\,. \qquad (8.20)$$

Электронная формула W_r_n выполняет вычисления по формулам (8.17) или (8.20) в зависимости от того, принадлежат Xg, Xi к классу Norm_1 или Norm_2. Цель T во втором случае должна быть задана плоской фигурой (объектом классов RecShape, CircShape и т.п.).

Схема трех и более групп ошибок

Если в системе ошибок стрельбы из одного орудия можно выделить только две группы – повторяющиеся в каждом выстреле и индивидуальные, то в стрельбе батареей повторяющиеся ошибки делятся еще на две группы. Часть из них одинаковы для всех орудий (ошибки, связанные с определением положения цели, учетом метеоусловий), часть – индивидуальная особенность орудия (прицельных приспособлений, износа ствола). Соответственно, дисперсия суммарной ошибки стрельбы складывается из трех компонент: дисперсий батарейных, орудийных ошибок и индивидуального рассеивания. Первые два слагаемых можно объединить в дисперсию повторяющихся ошибок (выражения для СКО справедливы и в срединных отклонениях):

$$\sigma_x^2 = \sigma_{x_{бат}}^2 + \sigma_{x_{ор}}^2 + \sigma_д^2 = \sigma_{x_п}^2 + \sigma_д^2\,, \quad E_x^2 = E_{x_{бат}}^2 + E_{x_{ор}}^2 + \text{В}_д^2 = E_{x_п}^2 + \text{В}_д^2\,.$$

В структуре корреляционной матрицы трех групп ошибок теперь не один, а два коэффициента корреляции – *орудийный* $r_{ор}$ и *батарейный* $r_{бат}$:

$$r_{ор} = \frac{E_{x_{ор}}^2 + E_{x_{бат}}^2}{E_x^2}\,, \quad r_{бат} = \frac{E_{x_{бат}}^2}{E_x^2}$$

В матрице $r^{(X)}$ элементы, соответствующие парам выстрелов из одного орудия, равны $r_{ор}$, остальные – $r_{бат}$. С увеличением числа групп в организации стрельбы (дивизион, группа дивизионов) соответственно усложняется и схема групп ошибок.

Сведение системы ошибок стрельбы к схеме двух групп ошибок

Чем больше групп ошибок, тем сложнее учитывать их при расчете показателей эффективности. С другой стороны, даже в случае стрельбы из одного орудия схема двух групп ошибок, которая позволяет достаточно просто оценивать эффективность действия по формуле вида (8.20), не всегда адекватна. Так, при стрельбе из одного орудия очередью повторяющиеся ошибки изменяются от начала к концу очереди, вследствие чего недиагональные элементы матрицы коэффициентов корреляции уже не одинаковы, а уменьшаются по мере их удаления от главной диагонали.

С целью упрощения расчетов эффективности реальную систему ошибок, представленную матрицей коэффициентов корреляции сводят к схеме двух групп ошибок, усредняя недиагональные элементы этой матрицы. Минимальные ошибки дает среднее геометрическое:

$$r_{x\text{о}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum r_{x_{ij}}^2}\ . \qquad (8.21)$$

Величину $r_{x\text{о}}$ называют *сведенным коэффициентом корреляции*. Так как в схеме двух групп ошибок коэффициент корреляции связан со срединными отклонениями суммарных и повторяющихся ошибок соотношениями (8.15), сведенному коэффициенту корреляции должно соответствовать *сведенное срединное отклонение повторяющихся ошибок* (или соответствующее СКО):

$$E_{x\text{о}} = E_x\sqrt{r_{x\text{о}}}\ ,\ \sigma_{x\text{о}} = \sigma_x\sqrt{r_{x\text{о}}}\ . \qquad (8.22)$$

Должно выполняться также соотношение между суммарной дисперсией и ее компонентами, откуда следует *сведенное срединное отклонение индивидуальных ошибок* (или СКО):

$$\text{В}_{\text{до}} = \sqrt{E_x^2 - E_{x\text{о}}^2}\ ,\ \sigma_{\text{хи о}} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_{x\text{о}}^2}\ . \qquad (8.23)$$

Таким образом, независимо от схемы стрельбы матрицу коэффициентов корреляции можно привести к эквивалентной схеме двух групп ошибок с характеристиками повторяющихся ошибок $E_{x\text{о}}$ и индивидуальных – $\text{В}_{\text{до}}$. При этом МО обеих групп равны сумме МО отнесенных к ним факторов (систематические ошибки, как правило, стремятся свести к нулю). Сведение к схеме двух групп ошибок позволяет вычислять показатель эффективности по формуле (8.20). Условный показатель вычисляют согласно нормальному распределению отклонений от фиксированного центра ($x_{\text{г}}, z_{\text{г}}$) с параметром рассеивания $\text{В}_{\text{до}}$, а осреднение условного показателя по всем возможным значениям ($x_{\text{г}}, z_{\text{г}}$) выполняют по нормальному закону с параметром $E_{x\text{о}}$.

Статистическое моделирование нескольких групп ошибок

Статистическое моделирование ошибок срельбы по схеме нескольких групп ошибок выполняет файл-функция Scatter2g(Xg,Xi,N,n,U) (Листинг 8.4). Она получает в качестве обязательных аргументов характеристики групповых Xg и индивидуальных ошибок Xi по одной из координат (объекты Norm_1), число испытаний N и число залпов n. Последний необязательный аргумент U в ScatterG2 позволяет сформировать группы ошибок в иерархическом порядке, начиная с самых крупных. В первой строке массива ячеек U располагаются характеристики ошибок, общих для данной группы, во второй строке – число единиц в данной группе. Возвращает Scatter2g объекты Norm_1 с характеристиками групповых и индивидуальных ошибок, коэффициент корреляции, общее число выстрелов, а также Nxn - матрицу ошибок стрельбы. Статистическое моделирование четырех залпов из двух орудий можно выполнить следующим образом:

```
>> Xg=Norm_1(8,5);Xi=Norm_1(4,6);Xb=Norm_1(0,3);N=100000;T=[-3,3];
>> [Yg,Yi,r,m,A]=Scatter2g(Xg,Xi,N,4,{Xb,2});
```

Сравним оценки МО и СКО по матрице A с характеристиками суммарной ошибки:

```
>> X=Xg+Xb+Xi, M=mean2(A),  s=std2(A)
   Norm_1  X [MO = 12.000  CKO = 8.367]
M =   12.0070  s =    8.3599
```

Их совпадение указывает на хорошее качество статистики (достаточное число испытаний). Вычислим матрицу выборочных коэффициентов корреляции:

```
>> R=CorrelCoef(A)
```

R =	**1.0000**	**0.4855**	**0.4869**	**0.4882**	0.3581	0.3583	0.3626	0.3602
	0.4855	**1.0000**	**0.4895**	**0.4857**	0.3625	0.3615	0.3602	0.3582
	0.4869	**0.4895**	**1.0000**	**0.4877**	0.3582	0.3582	0.3625	0.3617
	0.4882	**0.4857**	**0.4877**	**1.0000**	0.3555	0.3579	0.3612	0.3617
	0.3581	0.3625	0.3582	0.3555	**1.0000**	**0.4871**	**0.4906**	**0.4865**
	0.3583	0.3615	0.3582	0.3579	**0.4871**	**1.0000**	**0.4887**	**0.4877**
	0.3626	0.3602	0.3625	0.3612	**0.4906**	**0.4887**	**1.0000**	**0.4898**
	0.3602	0.3582	0.3617	0.3617	**0.4865**	**0.4877**	**0.4898**	**1.0000**

Обращает на себя внимание блочная структура вычисленной матрицы. Недиагональные элементы в выделенных блоках близки к 0,49, в остальных – к 0,36. Вычислим согласно схеме трех групп ошибок батарейный и орудийный коэффициенты корреляции:

```
>> X=Xg+Xb+Xi; r_bat=D(Xg)/D(X), r=D(Xg+Xb)/D(X)
r_bat =    0.3571  r =    0.4857
```

Теперь ясно, что в выделенных блоках содержатся коэффициенты корреляции выстрелов, произведенных из одного орудия, а в других – батарейные коэффициенты корреляции.

Четыре группы ошибок возникают при стрельбе дивизионом из N1 батарей по N2 орудий в каждом с групповыми ошибками дивизиона X1 и батарей X2. Сформировав надлежащим образом массив U = {X1, N1; X2, N2}, статистическое моделирование можно осуществить с помощью функции ScatterG2:

```
>> Xdiv=Xb*2; [Yg,Yi,r,m,A]=Scatter2g(Xg,Xi,N,3,{Xb,2;Xdiv,2});R=CorrelCoef(A)
```

R =	**1.0000**	**0.6613**	**0.6600**	0.5730	0.5735	0.5749	0.2389	0.2377	0.2350	0.2327	0.2338	0.2329
	0.6613	**1.0000**	**0.6604**	0.5736	0.5751	0.5756	0.2381	0.2358	0.2353	0.2361	0.2348	0.2355
	0.6600	**0.6604**	**1.0000**	0.5764	0.5750	0.5744	0.2377	0.2336	0.2349	0.2342	0.2345	0.2336
	0.5730	0.5736	0.5764	**1.0000**	**0.6584**	**0.6610**	0.2424	0.2374	0.2364	0.2379	0.2408	0.2371
	0.5735	0.5751	0.5750	**0.6584**	**1.0000**	**0.6589**	0.2406	0.2384	0.2357	0.2364	0.2376	0.2368
	0.5749	0.5756	0.5744	**0.6610**	**0.6589**	**1.0000**	0.2411	0.2411	0.2377	0.2358	0.2358	0.2337
	0.2389	0.2381	0.2377	0.2424	0.2406	0.2411	**1.0000**	**0.6605**	**0.6603**	0.5759	0.5765	0.5781
	0.2377	0.2358	0.2336	0.2374	0.2384	0.2411	**0.6605**	**1.0000**	**0.6635**	0.5739	0.5746	0.5765
	0.2350	0.2353	0.2349	0.2364	0.2357	0.2377	**0.6603**	**0.6635**	**1.0000**	0.5765	0.5766	0.5775
	0.2327	0.2361	0.2342	0.2379	0.2364	0.2358	0.5759	0.5739	0.5765	**1.0000**	**0.6606**	**0.6617**
	0.2338	0.2348	0.2345	0.2408	0.2376	0.2358	0.5765	0.5746	0.5766	**0.6606**	**1.0000**	**0.6608**
	0.2329	0.2355	0.2336	0.2371	0.2368	0.2337	0.5781	0.5765	0.5775	**0.6617**	**0.6608**	**1.0000**

При сквозной нумерации выстрелов в порядке принадлежности к группам корреляционная матрица имеет блочную структуру, к диагонали примыкают блоки, соответствующие выстрелам из одного орудия. Блоки, корреляций выстрелов из разных групп орудий отдаляются от диагонали по мере укрупнения групп, а корреляция между выстрелами уменьшается. Сопоставим значения в этих блоках с коэффициентами корреляции между ошибками, общими для всех выстрелов дивизиона, батареи и орудия:

```
>> r_div=D(Xg)/D(X), r_bat=D(Xg+Xdiv)/D(X), r_or=D(Xg+Xb+Xdiv)/D(X)
r_div =  0.2358   r_bat =  0.5755   r_or =  0.6604
```

Точные значения коэффициентов корреляции совпадают с соответствующими блоками матрицы. Можно выразить и сведенный коэффициент корреляции через характеристики групп ошибок, но метод, использующий статистическое моделирование более универсален.

Сведение произвольной системы ошибок стрельбы к схеме двух групп ошибок

Вычислим сведенный коэффициент корреляции r_{xo}, сведенные срединные отклонения повторяющихся и индивидуальных ошибок по формулам (8.21) – (8.23):

```
>> n=length(R);rm=sqrt((sum(sum(R.^2))-n)/n/(n-1))
>> M=mean2(A); Sx=std2(A), Sxo=Sx* sqrt(rm), Sxio=sqrt(Sx^2-Sxo^2), rm
Sx =   10.3052   Sxo =    6.8932   Sxio =    7.6604  rm =    0.4474
```

Результаты Scatter2g получены точно так же, поэтому полностью совпадают:

```
>> Y= Yg +Yi, Yg,Yi, r
   Norm_1  Y: MO = 12.027  CKO = 10.305
```

```
   Norm_1  Yg: MO = 12.027  CKO = 6.893
   Norm_1  Yi: MO = 0.000  CKO = 7.660
r =   0.4474
```

Ошибки стрельбы, моделирование которых осуществлялось по схеме четырех групп ошибок, корректно сведены к схеме двух групп ошибок, что позволяет вычислять вероятности поражения цели функцией W_r_n. Сравним оценки вероятности одного попадания по характеристическому массиву попаданий и с помощью объекта суммарных ошибок:

```
>> U=zeros(size(A));U(A>min(T) & A<max(T))=1; P=mean2(U),P_r=sum(sum(U,2)>0)/N
P =    0.1086  P_r =    0.6086
>> P=Ver(X,T), Pr=W_r_n(Yg,Yi,T,n)
P =    0.1087  Pr =    0.6121
```

Результаты вычислений по сведенной схеме двух групп ошибок практически совпадают со статистическими оценками, полученными обработкой большого объема прямых испытаний исходной модели стрельбы по схеме четырех групп ошибок. Это подтверждает корректность и правомерность использования статистического подхода.

Влияние зависимости ошибок на вероятность поражения цели

Реализация метода сведения ошибок стрельбы к двум группам в объектно-ориентированной технологии полиморфна: Функцию Scatter2g можно применять к одномерным и двумерным распределениям. Электронную формулу W_r_n также можно применять к распределениям, заданным системой двух групп ошибок в виде двух объектов (Xg, Xi), принадлежащих либо классу Norm_1, либо Norm_2. Типу этих объектов должна соответствовать геометрия цели: интервал, прямоугольная область или объект класса плоских фигур. Характеристики распределения, заданные несколькими группами ошибок, необходимо сначала обработать программой Scatter2g.

Если структура системы ошибок неизвестна, но известно суммарное распределение и общий коэффициент корреляции r между выстрелами, вероятность W поражения цели T с условным законом поражения G в n выстрелах можно вычислять с помощью той же электронной формулы W_r_n(X,r,T,n,G), задавая в качестве первых двух аргументов объект X с характеристиками суммарного распределения и коэффициент корреляции r. Например, зависимость вероятности хотя бы одного попадания в интервал (рис. 8.6) построим следующим образом:

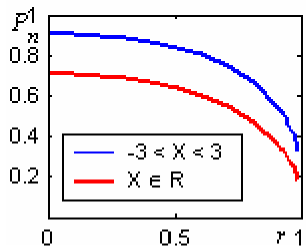

Рис. 8.6. Влияние корреляции на вероятность попадания

```
>> Xg=Norm_1(0,8); Xi=Xg; X=Xg+Xi; T=[-3,3];net=[0.01:0.1:0.9 0.91:0.01:1];
>> p=[];for r=net p(end+1)= W_r_n(X,r,T,10);end,  plot(net,p)
```

Объект двумерного нормального распределения создадим так, что его проекциями являются определенные выше одномерные СВ. Построим зависимость вероятности хотя бы одного попадания в прямоугольник 10×10 той же циклической командой:

```
>> X2=Norm_2([Xg Xg])+Norm_2([Xi Xi]); R=RecShape([10 10]);
>> p=[];for r=net p(end+1)= W_r_n(X2,r,R,10);end,hold on, plot(net,p,'r')
```

Откуда берутся исходные данные о характеристиках ошибок стрельбы? Источники части индивидуальных ошибок – начальные возмущения при выстреле. Хотя они большей частью не зависят от конструкции снаряда, в конечном итоге влияние на рассеивание точки попадания зависит от баллистических характеристик снаряда. Поэтому индивидуальные ошибки необходимо рассматривать как *функцию случайных величин* – начальных возмущений.

Программа верификации кода MATLAB

```
clear all
R=RecShape([3,5]);Show(R), hold on
Xg=Norm_2([2,3]);Xi=Xg*2; X=Xi+Gen(Xg,1);n=20; Z=Gen(X, n); ShowAll(Z,'.',Xg)
Xi=Xg; Xg=Xi*2; ShowAll( Xg, R, 'r' )
X=Xi+Gen(Xg,1);Z=Gen(X, n); Show(Z,'.')
Xg=Norm_2([2,3]); Xi=Xg;  X=Xi+Gen(Xg,1);Z=Gen(X, n); ShowAll(Z,'.', Xg, R,
'r')

clear all
Xg=Norm_1(0,8); Xi=Xg; X=Xg+Xi; T=[-3,3];n=10;
p1=Ver(X,T),P1=Ver(Xg,T),P0=1-(1-p1)^n
N=1000;A=Gen(Xi,N,n)+repmat(Gen(Xg,N,1),1,n);
U=zeros(size(A));U(A>min(T) & A<max(T))=1; P= mean2(U)
P_r=sum(sum(U,2)>0)/N
R=CorrelCoef(A)
Xg=Norm_1(0,8); Xi=Xg; X=Xg+Xi; T=[-3,3];n=10;
x=Net(Xg); p=1-(1-Ver(Xi+x,T)).^n; Pr=Trap(p.*f(Xg,x),x)
P=W_r_n(Xg,Xi,T,n), W=W_r_n(Xg,Xi,T,n,0.3),wr=W_r_n(Xg,Xi,T,n,1-(1-
0.3).^(1:n))
n=10;N=50;s=linspace(0,2,N);for i=1:N [p(i),r(i)]=W_r_n(Xg,Xi*s(i),T,n);end,
plot(r,p)
S=linspace(0.01,1.4,N);
i=1;for s=S [p(i),r(i)]=W_r_n(Xg*sqrt(2-s^2),Xi*s,T,n);i=i+1;end, hold on,
plot(r,p,'r')
R=0:0.01:1; Q=P1+sqrt(1-R.^2)*(P0-P1);plot(R,Q,'--')

clear all
Xg=Norm_1(8,5);Xi=Norm_1(4,6);Xb=Norm_1(0,3);N=1000;T=[-3,3];
[Yg,Yi,r,m,A]=Scatter2g(Xg,Xi,N,4,{Xb,2});
X=Xg+Xb+Xi, M=mean2(A),  s=std2(A)
X=Xg+Xb+Xi; r_bat=D(Xg)/D(X), r=D(Xg+Xb)/D(X)
Xdiv=Xb*2; [Yg,Yi,r,m,A]=Scatter2g(Xg,Xi,N,3,{Xb,2;Xdiv,2});R=CorrelCoef(A)
r_div=D(Xg)/D(X), r_bat=D(Xg+Xdiv)/D(X), r_or=D(Xg+Xb+Xdiv)/D(X)
n=length(R);rm=sqrt((sum(sum(R.^2))-n)/n/(n-1))
M=mean2(A); Sx=std2(A), Sxo=Sx* sqrt(rm), Sxio=sqrt(Sx^2-Sxo^2), rm
Y= Yg +Yi, Yg,Yi, r
U=zeros(size(A));U(A>min(T) & A<max(T))=1; P=mean2(U),P_r=sum(sum(U,2)>0)/N
P=Ver(X,T), Pr=W_r_n(Yg,Yi,T,n)

clear all
Xg=Norm_1(0,8); Xi=Xg; X=Xg+Xi; T=[-3,3];net=[0.01:0.1:0.9 0.91:0.01:1];
p=[];for r=net p(end+1)= W_r_n(X,r,T,10);end,  plot(net,p)
X2=Norm_2([Xg Xg])+Norm_2([Xi Xi]); R=RecShape([10 10]);
p=[];for r=net p(end+1)= W_r_n(X2,r,R,10);end,hold on, plot(net,p,'r')
```

Контрольные вопросы

1. Какими свойствами обладает функция распределения системы n СВ?
2. В чем принципиальное отличие системы n СВ от системы двух СВ?
3. Сколько информативных (не предопределенных) элементов содержится в матрице коэффициентов корреляции системы n СВ?
4. О чем говорит блочная структура матрицы коэффициентов корреляции системы n СВ?
5. Как можно получить корреляционную матрицу суммы некоррелированных случайных векторов?