Лекция 5

Законы распределения непрерывных СВ

Расстояние между точками пуассоновского поля

В некоторых случаях интерес представляет не количество случайных точек поля в какой-то области, а расстояние между соседними, то есть любыми двумя ближайшими точками поля (расстояние между пробоинами в корпусе, влияющее на сохранение несущей способности, промежуток времени между двумя запросами на обслуживание, от которого зависит вероятность отказа). Речь идет о случайных величинах, и нужно построить для них функции распределения $F(r) = P(R < r)$. Событие $(R < r)$ означает, что расстояние R от произвольной точки поля до ближайшей соседней меньше r.

Пространственное поле: распределение Максвелла

В трехмерном пространстве событие $(R < r)$ эквивалентно попаданию в сферу радиуса r с центром в выбранной точке еще хотя бы одной точки поля. Так как поле простейшее пуассоновское, число точек внутри сферы подчиняется закону Пуассона с параметром $a = \frac{4}{3}\pi r^3\lambda$ и вероятность попадания хотя бы одной точки внутрь сферы равна $1 - p_0 = 1 - e^{-a}$, расстояние между ближайшими точками пространственного поля подчиняется *закону Максвелла*

$$F(r) = \begin{cases} P(R<r) = 1 - e^{-\frac{4}{3}\pi r^3\lambda}, & r \ge 0, \\ 0, & r < 0, \end{cases} \qquad (5.1)$$

$$f(r) = F'(r) = 4\pi\lambda r^2 e^{-\frac{4}{3}\pi r^3\lambda}, \quad r \ge 0. \qquad (5.2)$$

Плоское поле: распределение Рэлея

То же событие $(R < r)$ на плоскости означает попадание хотя бы одной точки в круг радиуса r:

$$F(r) = P(R<r) = 1 - e^{-\pi r^2\lambda}, \ r \ge 0; \qquad (5.3)$$

$$f(r) = F'(r) = 2\pi\lambda r e^{-\pi r^2\lambda}, \quad r \ge 0. \qquad (5.4)$$

Расстояние между соседними точками простейшего пуассоновского поля на плоскости подчиняется *закону Рэлея*.

Линейное поле: показательное распределение

В одномерном пуассоновском поле вероятность попадания случайной точки на отрезок длиной $2r$ с центром в выбранной точке определяется параметром закона Пуассона $2r\lambda$:

$$F(r) = P(R < r) = 1 - e^{-2r\lambda}, \quad r \ge 0 .$$

В простейшем пуассоновском потоке событий интервал времени до наступления ближайшего события *в будущем* односторонний, поэтому *показательный* закон записывают в виде:

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}, \ t \ge 0, \qquad (5.5)$$

$$f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \ge 0. \qquad (5.6)$$

Показательный закон распределения

Показательное (экспоненциальное) распределение применяется в *теории надежности, теории массового обслуживания* для вычисления вероятностей событий, связанных с пуассоновскими потоками (заявок, отказов).

Числовые характеристики показательного распределения

Мода показательного распределения равна нулю, так как $f(0) = \lambda > f(x)$, $\forall x > 0$ (рис.5.1). Это значит, что вероятность первого наступления события в малом интервале $[x,\ x + \Delta x]$ $P(x < X < x + \Delta x) = f(x)\Delta x$ наибольшая при $x = 0$. С ростом x возрастает вероятность $P(X < x)$ того, что событие уже произошло, элемент вероятности $f(x)\Delta x$ уменьшается, но условная вероятность первого наступления события остается постоянной:

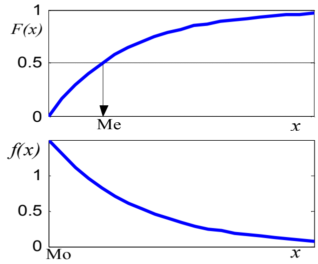


Рис. 5.1. Графики показательного распределения

$$P(x < X < x + \Delta x \mid X > x) = \frac{P((x < X < x + \Delta x)(X > x))}{P(X > x)} =$$

$$= \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{P(X > x)} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{f(x)\Delta x}{e^{-\lambda x}} = \lambda \Delta x.$$

Из уравнения $F(\mathrm{Me}) = 0{,}5$ найдем медиану распределения:

$$1 - e^{-\lambda \mathrm{Me}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{Me} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Для получения моментных ЧХ определим все начальные моменты:

$$\alpha_k[X] = \int_0^\infty x^k \lambda e^{-\lambda x} dx = \begin{vmatrix} u = x^k \\ v = -e^{-\lambda x} \end{vmatrix} = -x^k e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty k x^{k-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{k}{\lambda}\alpha_{k-1}[X].$$

Первое слагаемое обращается в ноль, так как при $k \to \infty$ экспонента $e^{-\lambda x}$ убывает быстрее, чем растет x^k, а второе слагаемое выражено через начальный момент младшего порядка. Начальные моменты показательного распределения связаны рекуррентным соотношением, причем $\alpha_0[X] = M[X^0] = 1$:

$$\alpha_k[X] = \frac{k}{\lambda}\frac{k-1}{\lambda}\cdots\frac{1}{\lambda} = \frac{k!}{\lambda^k}.$$

Теперь легко получить моментные характеристики:

$$m_x = \alpha_1[X] = \frac{1}{\lambda}, \tag{5.7}$$

$$D_x = \mu_2 = \alpha_2[X] - m_x^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}, \tag{5.8}$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{1}{\lambda}. \tag{5.9}$$

То, что МО совпадает с СКО, характерная особенность показательного закона. Центральные моменты для асимметрии и эксцесса получим, воспользовавшись соотношениями (4.18), (4.19):

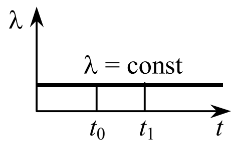
$$\mu_3[X] = \alpha_3 - 3m\mu_2 - m^3 = \frac{6}{\lambda^3} - 3\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^3}.$$

$$\mu_4[X] = \alpha_4 - 4m\mu_3 - 6m^2\mu_2 - m^4 = \frac{24}{\lambda^4} - 4\frac{1}{\lambda}\frac{2}{\lambda^3} - 6\frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^4} = \frac{9}{\lambda^4}.$$

Итак, показательное распределение имеет $\mathrm{As} = \mu_3/\sigma^3 = 2$, $\mathrm{Ex} = \mu_4/\sigma^4 - 3 = 6$.

Показательный закон распределения в теории надежности

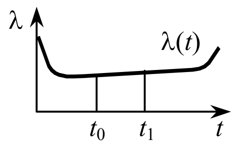
Особенность показательного закона



При показательном распределении моментов наступления отказов *вероятность безотказной работы устройства в некотором интервале времени при постоянной плотности отказов зависит только от длительности интервала и не зависит от продолжительности предшествующей безотказной работы*. Эта особенность (говорят, показательный закон не имеет ни памяти, ни совести) – следствие условий простейшего пуассоновского потока. Действительно, если в начальный момент времени t_0 устройство работоспособно, т.е. ($T > t_0$), вероятность того, что и в последующий период (t_0, t_1) не произойдет отказ, определяется как условная:

$$P((T>t_1)/(T>t_0))=\frac{P((T>t_1)(T>t_0))}{P(T>t_0)}=\frac{P(T>t_1)}{P(T>t_0)}=\frac{1-F(t_1)}{1-F(t_0)}=e^{-\lambda(t_1-t_0)}.$$

Нестационарный пуассоновский поток



Опыт подсказывает, что надежность технических устройств со временем меняется. Поток отказов можно считать стационарным только в течение определенного срока, в общем случае функция распределения не является показательной. В нестационарном пуассоновском потоке с плотностью $\lambda(t)$ среднее число отказов a в интервале $(0, t)$ получается интегрированием $\lambda(t)$ по этому интервалу:

$$F(t)=P(T<t)=1-p_0=1-e^{-a}=1-e^{-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau}. \qquad (5.10)$$

В том, что эта форма функции распределения отказов самая общая, можно убедиться, рассматривая интенсивность отказов в нестационарном потоке как отношение условной вероятности первого отказа в бесконечно малом интервале $t + dt$ к длительности этого интервала:

$$\lambda(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P((t<T\le t+\Delta t)/(T>t))}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(t<T\le t+\Delta t)/\Delta t)}{P(T>t)}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(F(t+\Delta t)-F(t))/\Delta t}{P(T>t)}=\frac{F'(t)}{1-F(t)}=\frac{f(t)}{1-F(t)}.$$

Выразим интенсивность отказов через *функцию надежности* $R(t) = 1 - F(t)$:

$$\lambda(t)=-\frac{R'(t)}{R(t)}.$$

Решая это уравнение с начальным условием $R(0) = 1$ (в начальный момент устройство исправно), получим

$$R(t)=e^{-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau},$$

что подтверждает справедливость формулы (5.10). Вероятность безотказной работы в период (t_0, t_1) при условии, что в момент t_0 устройство исправно

$$P((T>t_1)/(T>t_0))=\frac{1-F(t_1)}{1-F(t_0)}=\exp\left(-\int_{t_0}^{t_1}\lambda(t)dt\right),$$

зависит от продолжительности предшествующей работы в той мере, в какой интенсивность отказов зависит от времени. Только при показательном распределения отказов интенсивность не зависит от времени:

$$\frac{f(t)}{1-F(t)}=\frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1-(1-e^{-\lambda t})}=\lambda,\; R(t)=e^{-\lambda t}.$$

Надежность последовательных и параллельных соединений элементов

Надежность сложной системы зависит от надежности ее элементов и от того, в какой мере отказы элементов влияют на работоспособность системы в целом. В системах без резервирования (с последовательным соединением элементов) отказ каждого элемента приводит к отказу системы. Функция надежности получается как произведение функций надежности элементов:

$$R(t) = \prod_i R_i(t) = \prod_i e^{-\lambda_i t} = \exp\left(-\sum_i \lambda_i t\right). \qquad (5.11)$$

Интенсивность отказов последовательной схемы равна сумме интенсивностей отказов элементов. Отказ резервированного звена наступает при отказе всех его элементов. *Функция отказов параллельного соединения равна произведению функций отказов элементов*:

$$F(t) = \prod_i F_i(t). \qquad (5.12)$$

Статистическое моделирование надежности

Моделируя поток отказов в системе без резервирования генератором случайных реализаций с параметром ‘exp’, разыграем N серий по n реализаций – моменты наступления отказов в n элементах. К отказу системы приведет самый ранний отказ. Построим эмпирические функции распределения моментов отказа последовательной цепочки (рис. 5.3, *а*):

```
>> L=1;N=10000;n=10;B=Gen('exp',L,n,N); minB=min(B); maxB=max(B);
>> [F,f,H,K]=SmartHist(minB,[],20);Show(K),hold on,plot(H.x,1-exp(-L*n.*H.x),  'g')
```

Нанесена кривая функции распределения отказов последовательного соединения элементов – показательный закон с параметром $n\lambda_i = 10$ согласно формуле (5.11). Кумулята моментов отказа резервированного звена (*б*) построена по максимальным моментам отказов, так как система работает, пока не откажет последний элемент:

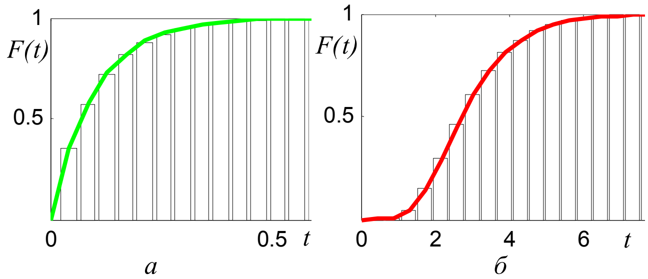


Рис. 5.3. Эмпирические функции распределения отказов в последовательной (*а*), параллельной (*б*) схемах

```
>>[F,f,H,K]=SmartHist(maxB,[],20);figure, Show(K), hold on,plot(F.x,F.F,'r')
```

Аппроксимировать статистическую функцию распределения показательным законом в этом случае нельзя, так как даже визуально из рис. 5.3, *б* можно видеть, что статистическая функция распределения имеет перегиб не характерный для показательной функции. Воспользуемся программой аппроксимации законов распределения ApproxLaw (Листинг 5.1), чтобы подобрать более подходящий закон.

На рис. 5.4 статистическая функция распределения отказов параллельного соединения (гладкая кривая на рис. 5.3, *б*) показана ступенчатой линией, чтобы она лучше отличалась от гладких аппроксимирующих кривых.

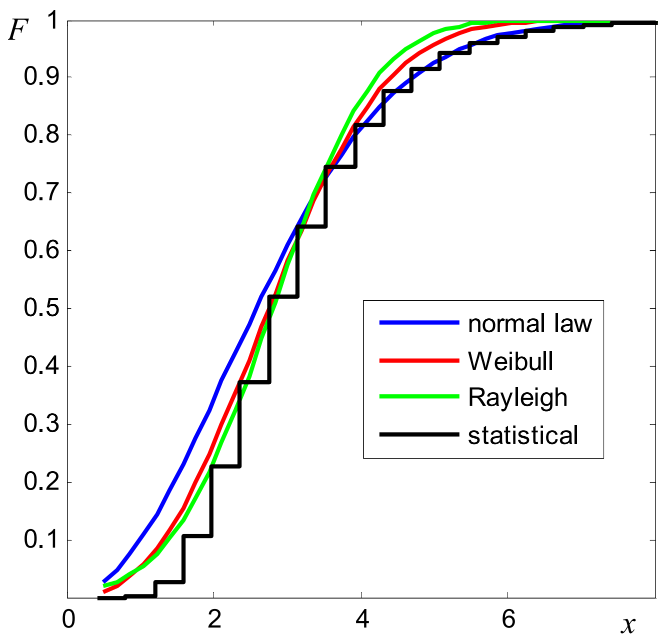


Рис. 5.4. Эмпирические функции распределения отказов в последовательной (*а*), параллельной (*б*) схемах

Для функции аппроксимации нужно задать сокращенное название закона (как и программе Gen), а также статистическую функцию распределения:

```
>> [Fun,Par,err]=ApproxLaw('Ray',F); plot(K.x,Fun(K.x,Par),'g')
Fun =
    Inline function:
    Fun(x,L) = 1-exp(-(x.^2/(2*L^2)))
Par =  2.1920   err =  0.0209
```

Возвращает ApproxLaw сформированную инлайн-функцию и ее параметры, и среднеквадратическую ошибку. В этой же команде построен график полученной аппроксимирующей функции в форме закона Рэлея, который заметно отличается от истинного распределения в поздних периодах. Возьмем теперь нормальный закон:

```
>> [Fun,Par,err]=ApproxLaw('norm',F); plot(K.x,Fun(K.x,Par),'b')
```

Аппроксимация нормальным законом (синяя кривая) совпадает с точной в поздних периодах, но сильно отличается в начале. Выберем двухпараметрический закон Вейбулла:

```
>> [Fun,Par,err]=ApproxLaw('Wei',F), plot(K.x,Fun(K.x,Par),'r')
Fun =
    Inline function:
    Fun(x,L) = 1-exp(-(x*L(1)).^L(2))
Par =  0.3202    2.6881    err = 0.0122
```

Красная кривая занимает промежуточное положение между первыми двумя аппроксимирующими кривыми. Приближение законом Вейбулла дает наименьшую среднеквадратическую ошибку err.

Распределение Вейбулла

Надежность схем с резервированием не подчиняется показательному закону. Потоки отказов в сложных системах описывают более общим двухпараметрическим *законом Вейбулла*:

$$F(t)=1-e^{-(\lambda t)^{\alpha}},\ t\ge 0, \tag{5.13}$$

$$f(t)=F'(t)=\alpha\lambda(\lambda t)^{\alpha-1}e^{-(\lambda t)^{\alpha}},\quad t\ge 0. \tag{5.14}$$

Параметр α определяет форму распределения Вейбулла. В частности, при целых α закон Вейбулла превращается в показательный ($\alpha = 1$), Рэлея ($\alpha = 2$) или Максвелла ($\alpha = 3$). Это значит, что выражения для числовых характеристик закона Вейбулла общие для данного семейства распределений. Мода и медиана зависят от параметров распределения следующим образом:

$$Mo = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{5.15}$$

$$Me = \sqrt[\alpha]{\ln 2}\,\frac{1}{\lambda}. \tag{5.16}$$

Нетрудно убедиться подстановкой $\alpha = 1$ в эти формулы, что из них вытекают выражения для Mo и Me показательного закона. Начальные моменты выражаются через гамма-функцию (см. Приложение):

$$\alpha_k[X] = \Gamma(1 + k/\alpha)/\lambda^k. \tag{5.17}$$

Отсюда легко получим выражения для МО, дисперсии и асимметрии (см. соотношения между начальными и центральными моментами в Лекции 4):

$$M_x = \Gamma(1 + 1/\alpha)/\lambda, \tag{5.18}$$

$$D_x = \Gamma(1 + 2/\alpha)/\lambda^2 - M_x^2. \tag{5.19}$$

$$As = \Gamma(1 + 3/\alpha)/\lambda^3 - 3\, M_x D_x - M_x^3. \tag{5.20}$$

Надежность сложных систем

Логика функционирования реальных систем обычно сочетает последовательные и параллельные соединения отдельных элементов или блоков элементов, при том что характеристики надежности, как правило, определяются для элементов. В связи с этим возникают проблемы *прогнозирования надежности*, *обеспечения требуемого уровня надежности* проектируемой системы. Это часть проблемы системного анализа эффективности, поскольку радикальное повышение эффективности так или иначе связано с усложнением системы, что ведет к снижению надежности (и реальной эффективности).

Повысить надежность системы при данных характеристиках надежности комплектующих элементов можно резервированием, регламентированием режима эксплуатации, профилактическими и восстановительными мероприятиями. Для получения нужного результата эти действия должны быть согласованы в рамках модели надежности системы. Но если простая совокупность элементов (последовательное соединение) имеет простую модель надежности, то резервирование ведет к усложнению модели. Получение количественной оценки надежности исключительно математическим аппаратом возможно лишь при упрощающих допущениях, что для системного анализа категорически неприемлемо. В качестве инструмента системного анализа надежности можно использовать объектно-ориентированную модель потока отказов, учитывающую все особенности функциональных элементов с точки зрения надежности и реальную схему их взаимодействия в системе.

Логика отказов последовательных и параллельных цепочек определены в классе RabLog операциями сложения и умножения (Листинг 5.2) подобно тому, как правила сложения и умножения вероятностей реализованы в классе Accid. По реализациям отказов элементов (массив B) построим функцию отказов схемы, состоящей из трех резервированных звеньев $(1\vee 2\vee 3\vee 4)\wedge(5\vee 6\vee 7\vee 8)\wedge(9\vee 10)$:

```
>> L=1;N=10000;n=10;B=Gen('exp',L,n,N);  S='sum(U(1:4))*sum(U(5:8))*(U(9)+U(10))';
>> b=[]; for i=1:N U=RabLog(B(:,i));b(i)=Value(eval(S));end,[F,f,H,K]=SmartHist(b,[],50);
```

С помощью функции Approx найдем параметры λ и α закона Вейбулла для аппроксимации кумуляты отказов системы, построим графики статистического распределения и аппроксимации (рис. 5.5):

```
>> [Fun,Par]=Approx('1-exp(-(x*L(1)).^L(2))',F.x, F.F ,[1 1])
Fun(x,L) = 1-exp(-(x*L(1)).^L(2))
Par =    1.4839    1.4601
>> Lam=prod(Par).*(Par(1)*f.x).^(Par(2)-1) ; ff=Lam.*exp(-(Par(1)*f.x).^Par(2));
>> Show(F,'k', f,'k'), FF=Fun(f.x,Par); hold on,plot(f.x, FF,  'r', f.x, ff, 'r')
```

Аппроксимирующие кривые по закону Вейбулла для функции и плотности распределения (сплошные линии) качественно соответствуют пунктирным статистическим кривым, хотя не вполне совпадают. Сравним точечные оценки МО и дисперсии с соответствующими характеристиками теоретического закона:

```
>> m=mean(b),s=std(b)
m =   0.6326    s =   0.4550
>> [m,D,s]=MDS('Wei',Par); m, s
m =   0.6010    s =   0.3964
```

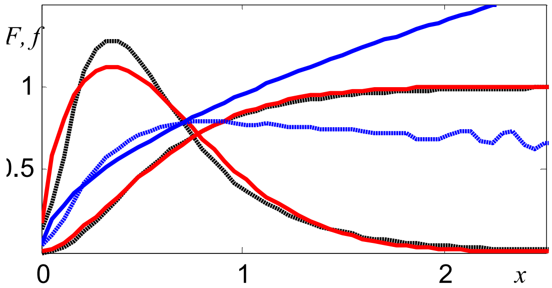


Рис. 5.5. Статистическое распределение отказов (пунктир) в последовательно-параллельном соединении и аппроксимация законом Вейбулла

Интенсивность отказов по закону Вейбулла (парабола $\alpha\lambda(\lambda x)^{\alpha-1}$, $\lambda = 1{,}48$, $\alpha = 1{,}46$) качественно отличается от статистической интенсивности (синие кривые):

```
>> plot(f.x(1:30),f.f(1:30)./(1-F.F(1:30))/3, 'g', f.x,ff./(1-FF)/3)
```

Объектно-ориентированный анализ надежности

Инкапсуляция логических правил исчисления надежности системы в специальный класс имеет очевидное преимущество перед традиционным подходом, основанным на аналитическом моделировании. Объектное моделирование не требует упрощений, свойственных аналитическим методам, поэтому точность вычислений не зависит от степени сложности системы. Достаточно лишь четко определить параметры надежности элементов и схему их соединения. Но это не всегда возможно. Характеристики надежности элементов могут зависеть от времени, от условий эксплуатации, профилактических мероприятий и т.д. Резервирование может быть эксплуатационным (заменяется вышедшее из строя устройство целиком, как участок S_2 на рис. 5.6) или блочным. Блочное резервирование может быть нагруженным, когда резервный элемент работает одновременно с основным, или ненаруженным, включаемым только при выходе из строя основного элемента. При резервировании (элемента E_5 элементом R_5) учитывается и надежность переключателя (r_5), который может быть единым для всех резервных элементов или индивидуальным, количество резервных элеметов может быть неизвестным и подлежать оптимизацияи по критерию стоимости системы в целом.

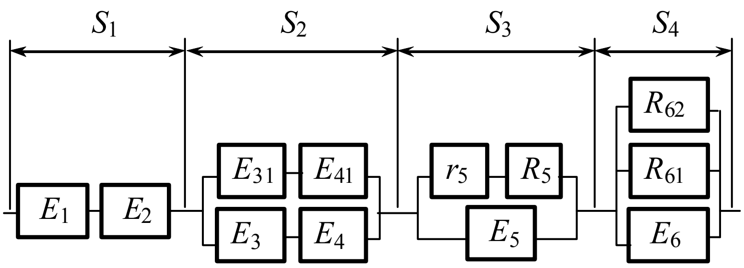


Рис. 5.6. Функциональная схема надежности системы

Если абстрагироваться от всех особенностей или каким-то образом неявно учитывать их, назначая числовой параметр надежности, системный анализ теряет смысл. Полиморфизм объектного моделирования позволяет обогащать набор свойств каждого элемента системы, сохраняя алгебру операций с ними, определенную в базовом классе (RabLog), и базовую технологию приведения подсистем к эквивалентным по надежности простым элементам. В основе этой технологии – статистическое моделирование отказов элементов согласно их индивидуальным свойствам с последующей аппроксимацией статистических распределений наиболее подходящим теоретическим законом (экспоненциальным, нормальным, логнормальным, Вейбулла и др.).

Конструктор класса RabSys получает список свойств элементов системы и создает соответствующие объекты. Соединение подсистем считается последовательным, если оно не задано символьной строкой. Метод RabSys\EqLaw подбирает эквивалент надежности для системы, пользуясь генераторами событий и аппроксимационными методами, реализованными в этом же классе. Этими средствами можно, например, описать надежность схемы, показанной на рис. 5.6, оценить закон распределения отказов этой системы и его параметры:

```
>> R=Rab('exp',1.1,'exp',1.2,'exp',2.7,1,'exp',1.5,1,1.4,0.9,'exp',1.6,3); [Law,P]=EqLaw(R)
Law =   Inline function:
    Law(x,L) = 1-exp(-(x*L(1)).^L(2))
P =  3.8518    1.2607
```

Аргументами конструктора Rab заданы надежности элементов E_1, …, E_6 с параметрами показательного закона 1,1, 1,2, 1,3, 1,4, 1,5, 1,6. Параметр надежности элемента R_5 равен 1,4, надежность переключателя r_5 задана вероятностью 0,9. Надежность элементов R_{61}, R_{61} принята равной надежности основного элемента, а переключение – абсолютно надежным. В результате получено, что надежность этой системы описывается законом Вейбулла с параметрами $\lambda = 3{,}85$, $\alpha = 1{,}26$.

Это значит, что выделенный фрагмент сложной системы можно заменить простым элементом с эквивалентной интенсивностью отказов по закону Law с параметрами P. Чтобы убедиться в этом, присоединим последовательно к подсистеме на рис. 5.6 еще точно такую же, во втором варианте присоединим ее эквивалент, и, наконец, соединим два эквивалента. Надежности трех вариантов должны быть одинаковы:

```
>> R1=Add(R,'exp',1.1,'exp',1.2,'exp',2.7,1,'exp',1.5,1,1.4,0.9,'exp',1.6,3);
>> R2=Add(R,'Wei',P); R3=Rab('Wei',P,'Wei',P);
>> [L1,P1]=EqLaw(R1); [L2,P2]=EqLaw(R2); [L3,P3]=EqLaw(R3); P,P1,P2,P3
P1 =  6.7901    1.2146
P2 =  6.7712    1.2231
P3 =  6.8384    1.2746
```

Характеристики надежности систем, представленных объектами R1, R2, R3 практически одинаковы, хотя сами объекты имеют разные структуры:

```
>> R1
R1(1)=exp(1.1)
R1(2)=exp(1.2)
R1(3)=exp(2.7)  rezerv:  1, parameter: 2.7, switch: 1
R1(4)=exp(1.5)  rezerv:  1, parameter: 1.4, switch: 0.9
R1(5)=exp(1.6)  rezerv:  3, parameter: 1.6, switch: 1
R1(6)=exp(1.1)
R1(7)=exp(1.2)
R1(8)=exp(2.7)  rezerv:  1, parameter: 2.7, switch: 1
R1(9)=exp(1.5)  rezerv:  1, parameter: 1.4, switch: 0.9
R1(10)=exp(1.6)  rezerv:  3, parameter: 1.6, switch: 1
>> R2
R2(1)=exp(1.1)
R2(2)=exp(1.2)
R2(3)=exp(2.7)  rezerv:  1, parameter: 2.7, switch: 1
R2(4)=exp(1.5)  rezerv:  1, parameter: 1.4, switch: 0.9
R2(5)=exp(1.6)  rezerv:  3, parameter: 1.6, switch: 1
R2(6)=Wei(3.85,1.26)
>> R3
R3(1)=Wei(3.85,1.26)
R3(2)=Wei(3.85,1.26)
```

Показательный закон в теории массового обслуживания

Вопросы, связанные с пропускной способностью систем, обслуживающих случайные потоки заявок, изучает *теория массового обслуживания* – раздел теории вероятностей.

Параметры одноканальной системы массового обслуживания

Поток заявок может быть регулярным или случайным, нестационарным или простейшим пуассоновским. Занятость системы массового обслуживания (СМО) определяется не только плотностью потока заявок λ, но и длительностью их обслуживания, зависящей от числа каналов и их производительности – среднего времени обслуживания заявки $T_{об}$. Обычно скорость обслуживания описывают показательным законом с параметром $\mu = 1/T_{об}$.

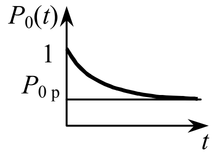
Вероятности свободного состояния одноканальной системы

Одноканальная система может быть в двух состояниях: свободно или занято. В момент времени t система находится в свободном состоянии с вероятностью $P_0(t)$ или в занятом с вероятностью $P_1(t) = 1 - P_0(t)$. К концу интервала $[t, t + \Delta t]$ канал свободен, если он был свободен в момент t и в течение Δt заявка не поступила, или канал был занят, но освободился. Свободная в начале интервала система останется свободной с вероятностью непоступления ни одной заявки за время Δt: $P(T > \Delta t) = e^{-\lambda\Delta t} \approx 1 - \lambda\Delta t$. Условная вероятность того, что занятая система освободится за время Δt при показательном законе длительности обслуживания $P(T_{об} < \Delta t) = 1 - e^{-\mu\Delta t} \approx \mu\Delta t$. Вероятность $P_0(t + \Delta t)$ найдем по формуле полной вероятности:

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)(1 - \lambda\Delta t) + (1 - P_0(t))\mu\Delta t.$$

Переходя к пределу, получим уравнение для скорости изменения вероятности свободного состояния одноканальной СМО:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -(\lambda + \mu)P_0(t) + \mu .$$



Интегрирование при $P_0(0) = 1$ (в начальный момент система свободна) дает зависимость вероятности свободного состояния от времени

$$P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t} . \qquad (5.21)$$

Пропускная способность одноканальной системы

Вероятность свободного состояния системы, а с ней и доля выполняемых заявок – относительная пропускная способность одноканальной системы – со временем снижается до равновесной величины

$$P_{0р} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} . \qquad (5.22)$$

Вероятность того, что поступившая в СМО заявка не будет обработана, это вероятность отказа $P_{отк} = 1 - P_{0р}$.

Особенности многоканальных СМО

Система с n каналами может находиться в одном из $n + 1$ состояний A_k (k каналов заняты), $k = 0, 1, \ldots, n$. Условие для состояния A_0 такое же, как и в одноканальной системе. Вероятности $P(A_k)$, $k > 1$ также можно найти по формуле полной вероятности, рассматривая все возможные гипотезы, и получить систему дифференциальный уравнений Эйлера для скорости изменения этих вероятностей [1]. В установившемся режиме вероятности P_k числа занятых каналов получим из системы алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}\right)^{-1}, \\ P_k &= \frac{\alpha^k}{k!} P_0, \quad k = 1, \cdots, n \end{aligned}\right\} . \qquad (5.23)$$

где $\alpha = \lambda / \mu = \lambda\, T_{об}$ – среднее число заявок, поступающих в систему за среднее время обслуживания одной заявки (*интенсивность обслуживания*).

Многоканальная СМО простаивает (свободны все каналы) с вероятностью P_0 и полностью занята с вероятностью P_n (заявки отклоняются). Вероятность $q = 1 - P_n$ того, что хотя бы один канал свободен, – это относительная пропускная способность, а $Q = \lambda\, q$ – абсолютная.

СМО с ожиданиями

В *СМО с ожиданиями* выполняются все заявки, но в случае занятости системы, они поступают в очередь. При показательных законах поступления заявок и их обслуживания среднее время ожидания $\bar{t}_e$ выражается формулой:

$$\bar{t}_e = \frac{1}{\mu} \frac{\lambda}{\mu - \lambda} . \qquad (5.24)$$

При постоянной продолжительности обслуживания среднее время ожидания $\bar{t}_c$ вдвое меньше вычисленной по формуле (5.24): $\bar{t}_c = \bar{t}_e / 2$.

Статистическое моделирование многоканальной СМО

СМО с произвольными законами распределения потока заявок и длительности их обслуживания можно исследовать с помощью электронной формулы MassModel (Листинг 5.3). Она получает закон распределения заявок вместе с параметрами (например, {'exp',1.0}), распределение продолжительности обслуживания, число заявок N, число каналов обслуживания n (по умолчанию n =1) и признак q =1 для СМО с очередью. Она возвращает продолжительность ожидания в очереди каждой заявки (при q =1) или вероятность ее обработки. Для примера моделируем пуассоновский поток заявок с плотностью 1 заявка в минуту при средней длительности обслуживания $T_{об}$ = 0,99 минуты с показательным законом распределения. При такой малой разнице между средними переходный процесс будет длинным, поэтому проведем 10 серий по миллиону заявок и вычислим среднюю длительность ожидания в очереди:

```
>> A=[];for i=1:10 a=MassModel({'exp',1},{'exp',1/0.99},10^6);A(i)=mean(a);end;T=mean(A)
   T =   98.3760
```

Получается в среднем более 98 минут ожидания при том, что «в среднем» каждую заявку даже одноканальная СМО успевает обработать. Это не может быть ошибкой, фромула (5.24) при λ =1, μ = 1/0,99 дает T = 98,01. Это еще один пример того, что нельзя оперироавть средними, когда случайные отклонения в одну сторону (быстрая обработка раньше поступления новой заявки) не может компенсировать последующую задержку обработки.

Статистическим моделированием можно изучать различные сочетания законов потока заявок и продолжительности обслуживания. Например, при постоянной продолжительности обслуживания среднее время ожидания (теоретически оно должно быть вдвое меньше, чем 98,01) можно получить, заменив 'exp' на 'const' в параметрах СМО:

```
>> A=[];for i=1:10 a=MassModel({'exp',1},{'const',1/0.99},10^6);A(i)=mean(a);end;T=mean(A)
   T =   49.1612
```

Теоретические формулы вида (5.24) вычисляют только МО при определенном сочетании законов распределения. Электронная формула MassModel дает всю информацию о динамике состояний СМО при любых законах распределения потока заявок и обслуживания.

Моделирование динамики состояний многоканальной СМО

Занятость *n*-канальной СМО с отказами и ожиданиями моделирует файл-функция MassDyn(law1,law2,N,n,q,T) (Листинг 5.4). Первые 5 аргументов она передает функции MassModel для моделирования состояний до момента времени, заданного последним аргументом. Построим зависимость вероятности свободного состояния СМО с отказами (рис. 5.7):

```
>> t=[0:0.2:1,1.5:0.5:5]; L=1;m=0.5;v=L+m; P0=m/v+L/v*exp(-v*t);
>> a= MassDyn({'exp',L},{' exp',m},10^5,1,0,t); plot(t(1:length(a)),a, t,P0,'k--')
```

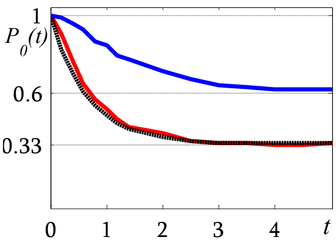


Рис. 5.7. Вероятность свободного состояния СМО

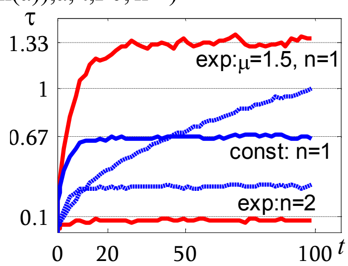


Рис. 5.8. Среднее время ожиданий в очереди

Статистическая вероятность вместе с кривой $P_0(t)$ при λ =1, μ = 0,5 снижаются до величины $P_{0р}$ = 0,33, что можно проверить подстановкой λ =1, μ = 0,5 в формулу (5.22). Заменив 4-й аргумент на 2 (2 канала), построим кривую, стремящуюся к $1-P_2$ = 0,6 согласно (5.23) (см. задачу 8). Той же командой после замены 5-го аргумента на 1 (СМО с очередью), построены кривые времени ожиданий в очереди (рис. 5.8). В одноканальной СМО с λ =1, μ = 1,5 среднее время ожиданий соответствует теоретической оценке согласно формуле (5.24), при равномерной скорости обслуживания оно вдвое меньше. В двухканальной СМО ожиданий практически нет. Пунктирная кривая ожиданий при $T_{об}$ = 0,99 стремися к τ = 98 (ее ординаты уменьшены в 10 раз). Еще одна пунктирная кривая построена для двухканальной системы с очередью.

Если истинный закон распределения СВ неизвестен, его выбирают из математических соображений (например, экспоненциальный закон для продолжительности обработки заявок). Электронные формулы не требуют упрощений, что позволяет выбирать закон по объективным признакам. Закон распределения содержит всю информацию о СВ, хотя достоверной можно считать только ту ее часть, которая содержится в известных признаках (интервал возможных значений, числовые характеристики). Из всех законов, имеющих известные признаки данной СВ, нужно выбрать тот, который привносит наименьшую дополнительную (а значит, ложную) информацию о СВ.

Информационный подход к выбору закона распределения

Наименее информативный закон распределения в интервале

Мерой информации, содержащейся в законе распределения $f(x)$, служит функционал

$$I(f) = M[\ln f] = \int f(x)\ln f(x)dx.$$

Функция $f(x)$, минимизирующая этот функционал на $[\alpha, \beta]$, должна удовлетворять основному свойству плотности распределения $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 1$. Условием стационарности функционала Лагранжа

$$L(f) = \int_{\alpha}^{\beta} (f\ln f + \lambda f)dx$$

является уравнение Эйлера

$$\ln f + 1 + \lambda = 0,$$

решение которого $f = C$ – постоянная функция на $[\alpha, \beta]$, причем, чтобы выполнялось основное свойство плотности, константа должна имеет значение $C = 1/(\beta - \alpha)$. Таким образом, наименее информативен в ограниченном интервале закон распределения с постояной плотностью – *равномерный закон*.

Показательный закон – самый непредсказуемый закон наступления отказов

Интервал моментов наступления отказов неограничен $(0, \infty)$, известна средняя продолжительность безотказной работы λ, поэтому закон распределения, минимизирующий информацию о закономерностях наступления отказов, должен кроме основнного свойства плотности в интервале $(0, \infty)$ удовлетворять и условию

$$\int_0^{\infty} xf(x)dx = \lambda, \qquad (5.25)$$

Безусловной минимизации подлежит функционал Лагранжа

$$L(f, \overline{\lambda}) = \int_0^{\infty} (f\ln f + \lambda_1 f + \lambda_2 xf)dx\ ,$$

стационарное решение которого находится из уравнения Эйлера

$$\ln f + 1 + \lambda_1 + \lambda_2 x = 0.$$

Подстановка $f(x) = \exp(-1 - \lambda_1 - \lambda_2 x)$ в первое ограничение дает $\lambda_2 = \exp(-1 - \lambda_1)$, после чего из условия (5.25) получим $\lambda_2 = \lambda$. Следовательно, $f(x) = \lambda\exp(-\lambda x)$, и именно показательный закон потока отказов, заявок на обслуживание наименее предсказуем.

Оптимальный выбор закона распределения по оценкам МО и дисперсии

Если пределы возможных значений СВ не ограничены, по экспериментальным реализациям $X_1, X_2,\dots, X_N$, вычисленны оценки МО и дисперсии $m = m_x^*$, $\sigma^2 = D_x^*$, минимизировать функционал $I(f)$ нужно с учетом еще одного ограничения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f(x)dx = \sigma^2. \qquad (5.26)$$

Уравнение Эйлера теперь имеет вид

$$\ln f + 1 + \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 (x - m)^2 = 0,$$

а множители Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ после подстановки $f(x) = \exp[-1 - \lambda_1 - \lambda_2 x - \lambda_3 (x - m)^2]$ в ограничения получают значения:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\ln 2\pi + \ln\sigma - 1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = \frac{1}{2\sigma^2}.$$

Плотность распределения, имеющего заданное МО m и дисперсию σ^2, и, кроме этого, содержащего минимум дополнительной информации о СВ, представляется функцией

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (5.27)$$

Это широко распространенное в теории вероятностей и математической статистике *нормальное распределение* или *закон Гаусса*.

Равномерное распределение

Равномерным называется распределение с постоянной плотностью на конечном интервале возможных значений [α, β] (рис. 5.7):

$$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha},\ x \in [\alpha, \beta].$$

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha},\ x \in [\alpha, \beta]$$

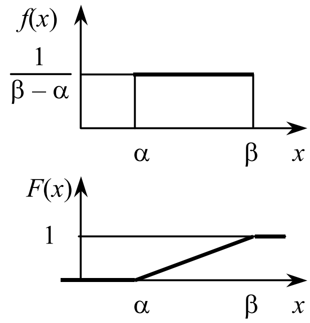


Рис. 5.7. Графики равномерного распределения

Вероятность событий ($X < x$) определяется как геометрическая вероятность.

Числовые характеристики

Равномерное распределение не имеет моды, а медиана и МО находятся в середине отрезка [α, β]:

$$\mathrm{Me} = m_x = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Центральные моменты нечетных порядков равны нулю, а для четных k

$$\mu_k[X] = \int_{\alpha}^{\beta} \left(x - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^k \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{(\beta - \alpha)^k}{2^k (k+1)},$$

откуда

$$D_x = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}, \tag{5.28}$$

$$\sigma_x = \frac{\beta - \alpha}{2\sqrt{3}} D_x, \tag{5.29}$$

$$Ex = \frac{(\beta - \alpha)^4}{16 \cdot 5 \cdot \sigma_x^4} - 3 = \frac{144}{80} - 3 = -1{,}2.$$

Условия применимости равномерного закона

Прямоугольный закон распределения прост для применения, но оно правомерно лишь в следующих случаях:

1. Известны границы возможных значений СВ и отсутствуют факторы, неодинаково благоприятные для всех возможных значений. Примеры таких СВ: угол прецессии в точке падения, результат измерения по грубой шкале с округлением до ближайшего целого.
2. Известны только оценки МО m_x^* и дисперсии D_x^* распределения, или закон распределения известен, но для упрощения вычислений заменяется равномерным. Границы аппроксимирующего равномерного распределения определяются известными МО m_x и дисперсией D_x (или СКО σ_x)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha + \beta}{2} &= m_x \\ \frac{\beta - \alpha}{2\sqrt{3}} &= \sqrt{D_x} = \sigma_x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = m_x - \sqrt{3}\sigma_x, \\ \beta = m_x + \sqrt{3}\sigma_x. \end{cases}$$

3. Пределы возможных значений СВ известны, но неизвестен характер распределения в этих пределах. В этом случае прямоугольный закон следует предпочесть всем другим, так как он привносит минимальную дополнительную (произвольную) информацию о СВ по сравнению с любым другим законом распределения с нулевой плотностью за пределами интервала [α, β].

Нормальный закон распределения

Нормальный закон с плотностью (5.27) и функцией распределения

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,dt \tag{5.30}$$

играет особую роль в теории вероятностей и математической статистике благодаря своим свойствам:

1. нормальная кривая является хорошим приближением биномиальной формулы при большом числе испытаний;
2. сумма большого числа СВ, среди которых нет превалирующих, подчиняется нормальному закону (центральная предельная теорема);
3. нормальный закон устойчив относительно сложения: сумма двух нормально распределенных СВ подчиняется нормальному закону;
4. плотность нормального закона наименее информативна из всех распределений неограниченной СВ, поэтому ее лучше всего использовать для доопределения имеющихся сведений о СВ.

Рассеивание снарядов является результатом влияния большого числа случайных факторов, среди которых нет превалирующих, поэтому его описывают нормальным законом. Ошибки целеуказания также распределены нормально. Сумма этих двух ошибок (*промах*) подчинена тому же закону.

Числовые характеристики

В силу симметрии нормального распределения относительно значения $x = m$ мода, медиана и МО совпадают: $\text{Mo} = \text{Me} = m_x = m$ (рис. 5.8) Плотность модального значения $f(\text{Mo})=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ обратно пропорциональна параметру σ. Это значит, что степень уплотнения наименьших отклонений СВ от среднего значения возрастает с уменьшением параметра σ, который, имея размерность случайной величины, играет роль СКО. Чтобы убедиться в этом, определим моментные характеристики:

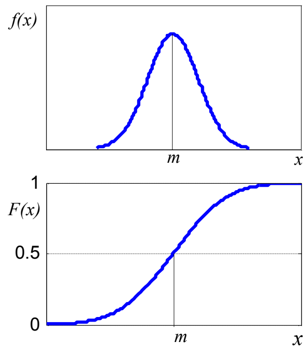


Рис. 5.8. Графики нормального распределения

$$\mu_k[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^k\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=\left|t=\frac{x-m}{\sigma}\right|=\frac{\sigma^k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

При нечетных k интеграл в симметричных пределах обращается в ноль. При четных k интеграл, выраженный через гамма-функцию,

$$I(k)=\int_{-\infty}^{\infty}t^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty}\tau^{\frac{k-1}{2}}e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau=2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)=2^{\frac{k}{2}}\sqrt{2\pi}\,\frac{(k-1)!!}{2^{k/2}},$$

с учетом свойства (5) равен $\sqrt{2\pi}\sigma^k(k-1)!!$. Получим для центральных моментов четных порядков общую формулу:

$$\mu_k[X]=\sigma^k(k-1)!!,\ k=2,\ 4,\ \ldots$$

В частности, $D_x = \mu_2[X] = \sigma^2$, $\sigma_x = \sigma$ и $Ex = \mu_4[X]/\sigma^4 = \dfrac{3\sigma^4}{\sigma^4}-3=0.$

Таким образом, параметры нормального распределения m, σ – это , соответственно, МО и СКО распределения. Принадлежность СВ X к классу нормальных распределений обозначают $X \in N(m, \sigma)$.

Вероятность попадания в заданный интервал

Определение вероятности попадания СВ в заданный интервал – одна из основных практических задач. При известных параметрах нормального распределения m, σ задача сводится к вычислению определенного интеграла

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx .$$

Если имеются значения функции распределения (5.11) на концах интервала, вычисление вероятности не составляет труда:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Стандартное нормальное распределение

В справочниках имеются таблицы значений функции стандартного нормального распределения $N_0(0,1)$ с параметрами $m = 0$, $\sigma = 1$. Эта функция имеет специальное обозначение $\Phi^*(x)$, но конечно обладает всеми свойствами функции распределения:

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dx . \tag{5.31}$$

Произвольную СВ $X \in N_0(0,1)$ можно привести к стандартной переносом начала координат в центр рассеивания и изменением масштаба в σ раз:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| t = \frac{x-m}{\sigma} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau = \Phi^*\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

С помощью таблицы стандартной функции нормального распределения вероятность попадания в заданный интервал можно вычислить по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi^*\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right). \tag{5.32}$$

Выражение вероятности попадания в интервал через табулированные функции

Часто в справочниках приводятся таблицы интегралов, похожих на $\Phi^*(x)$, но не являющихся функцией распределения. Чтобы правильно ими воспользоваться для вычисления вероятности попадания в интервал, нужно выявить их связь с функцией распределения. Так, функция Лапласа (1.18) отличается от $\Phi^*(x)$ тем, что она нечетна $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, причем

$$\Phi^*(x) = \Phi^*(0) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dx = \frac{1}{2} + \Phi(x), \quad x \in (-\infty, \infty) . \tag{5.33}$$

Приведенную функцию Лапласа удобно применять, когда параметры рассеивания определены вероятными отклонениями:

$$\hat{\Phi}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\rho x} e^{-t^2} dt , \ \rho = 0{,}477, \tag{5.34}$$

Выразим функцию нормального распределения и вероятность попадания в интервал $[\alpha,\beta]$ через все табулированные функции:

$$F(x)=\begin{cases}\Phi^*\left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right) & (5.35)\\[2mm] \dfrac{1}{2}+\Phi\left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right), & (5.36)\\[2mm] \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\hat{\Phi}\left(\dfrac{x-m}{\rho\sqrt{2}\sigma}\right). & (5.37)\end{cases}$$

Вероятность попадания в произвольный интервал можно вычислить как по формуле (5.16), так и с помощью других табулированных функций:

$$P(X\in[\alpha,\beta])=\begin{cases}\Phi\left(\dfrac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{\alpha-m}{\sigma}\right), & (5.38)\\[2mm] \dfrac{1}{2}\left[\hat{\Phi}\left(\dfrac{\beta-m}{\rho\sqrt{2}\sigma}\right)-\hat{\Phi}\left(\dfrac{\alpha-m}{\rho\sqrt{2}\sigma}\right)\right]. & (5.39)\end{cases}$$

Вероятность не более заданного отклонения от среднего значения

Если $\alpha = m - l$, $\beta = m + l$, аргументы табулированных функций отличаются только знаком: $\alpha - m = -l$, $\beta - m = l$. Так как $\Phi^*(-x) = 1-\Phi^*(x)$, а остальные функции нечетные, вероятность события ($|X-m| < l$) определяется группой формул через соответствующие функции:

$$P(|X-m|<l)=\begin{cases}2\Phi^*\left(\dfrac{l}{\sigma}\right)-1, & (5.40)\\[2mm] 2\Phi\left(\dfrac{l}{\sigma}\right), & (5.41)\\[2mm] \hat{\Phi}\left(\dfrac{l}{\rho\sqrt{2}\sigma}\right), & (5.42)\end{cases}$$

Срединное отклонение нормального распределения

В частности, срединное отклонение E, согласно определению которого $P(|X-m| < E) = 1/2$, получается как решение уравнения

$$\hat{\Phi}\left(\frac{E}{\rho\sqrt{2}\sigma}\right)=\frac{1}{2}.$$

Коэффициент $\rho = 0{,}477$ подобран так, что $\hat{\Phi}(1)=0{,}5$:

```
>> x=0:0.001:0.477; P=2/sqrt(pi)*Trap(exp(-x.^2),x)
P =   0.5001
```

Таким образом, срединное отклонение E нормального закона связано с параметром σ отношением $E=\rho\sqrt{2}\sigma\approx 0{,}674\sigma$. Срединное отклонение наряду с СКО σ применяется как характеристика рассеивания, но в отличие от параметра σ получается непосредственно из опыта как половина длины интервала, на который приходится половина всех точек падения при большом числе выстрелов на одной установке прицела. Если СВ задана параметрами m, E, удобнее пользоваться приведенной функцией Лапласа:

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{1}{2}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\beta-m}{E}\right)-\hat{\Phi}\left(\frac{\alpha-m}{E}\right)\right]. \qquad (5.43)$$

Правила «3-х сигм» и «4-х E»

Вычислим по формуле (5.36) вероятность отклонения от m не более, чем на σ, 2σ, 3σ, воспользовавшись векторизованной электронной функцией Лапласа F_LaplasV:

```
>> 2*F_LaplasV(1:3)
ans =    0.6827    0.9545    0.9973
```

Вероятность отклонения не более, чем на 2σ, больше 0,95, и почти достоверны отклонения в пределах 3σ. Поэтому считается, что практически все реализации СВ $X \in N[m, \sigma]$ заключены в интервале $[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$ (правило «3-х сигм») или в интервале $[m - 4E, m + 4E]$ (правило «4-х Е»).

Вычислим вероятность отклонения от m не более, чем на E, $2E$, $3E$, $4E$ с помощью той же функции, домножив аргументы на $\rho\sqrt{2}$:

```
>> 2*F_LaplasV([1:4]*(0.477*sqrt(2)))
ans =    0.5000    0.8227    0.9570    0.9930
```

Электронные формулы для нормально распределенных СВ

Применение файл-функций

Функцию распределения нормального закона $\Phi^*(x)$ можно построить, используя векторизованную функцию F_LaplasV согласно (5.33):

```
function F = P_Gauss(x)
F=F_LaplasV(x)+0.5;
```

Построим графики функции распределения $\Phi^*(x)$, функции Лапласа $\Phi(x)$, а также приведенной функции Лапласа $\hat{\Phi}(x)$ (рис. 5.9):

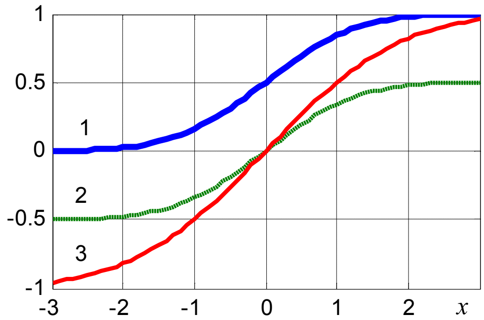


Рис. 5.9. Графики функций: 1 - Ф*(x), 2 -Ф(x), 3 - приведенной функции Лапласа

```
>> x=-3:0.1:3;plot(x, P_Gauss(x), x,F_LaplasV(x), x,2*F_LaplasV(0.477*sqrt(2)*x))
```

Файл-функции для вычислений, связанных со стандартным нормальным законом не требуют на входе параметров закона, но их можно использовать и для нормального закона с произвольными параметрами, приводя аргумент к стандартному распределению. Например, построить график плотности распределения СВ $X \in N(2, 3)$ можно с помощью файл-функции f_Gauss (рис. 5.10):

```
>> m=2;s=3;x=-10:0.1:10; plot(x,f_Gauss((x-m)/s)/s)
```

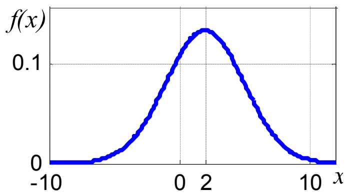


Рис. 5.10.

Использование структурных переменных

В простых вычислениях корректная подстановка аргументов не составляет проблемы, но при операциях с несколькими СВ и вложенными вызовами функций могут возникнуть технические трудности с передачей параметров распределений. Файл-функция f_Norm принимает параметры распределения m и σ в полях m и s структурной переменной X:

```
function f=f_Norm(X,x)
f=f_Gauss((x-X.m)/X.s)/X.s;
```

Определив структурную переменную, ее можно передавать всем вызываемым функциям. Например, предыдущую команду можно изменить так:

```
>> X.m=2;X.s=3;x=-10:0.1:10; plot(x,f_Norm(X,x))
```

Класс нормально распределенных случайных величин

В классе объектов Norm_1 кроме параметров распределения можно определить и часто употребляемые функции обработки нормально распределенных СВ. В папке класса @Norm_1 содержатся следующие полезные функции:

Norm_1(varargin) –	конструктор – создает объект класса с параметрами m, s, задаваемыми переменным списком (по умолчанию m = 0, s = 1);
setval(X,a,b) –	изменяет параметры объекта m, s;
Net(X,a,b,n,ns) –	разбивает интервал [a,b] на n равных частей (по умолчанию n=50, a, b вычисляются функцией Total, ns=4);

Total(X,a,b,ns)	–	определяет границы интервала m ± ns σ (в пределах [a,b], если они указаны);
f(X,x)	–	вычислиет плотность распределения на сетке x;
Ver(X,a,b)	–	вычисляет вероятность попадания СВ в интервал [a,b];
Gen(X,N)	–	генерирует N случайных точек согласно закону распределения;
Fint(X,s,varargin)	–	вычисляет полную вероятность с условным законом, заданным выражением в строке s, и параметрами в списке varargin;
display(X)	–	используется средой MATLAB для вывода параметров объкта на экран

Создадим объект, соответствующий СВ $X \in N(3,2)$ и вычислим вероятность отклонения от МО не более, чем E в большую сторону, по определению (равную 0,25):

```
>> X=Norm_1(3,2); p=Ver(X,3,3+2*sqrt(2)*0.477)
p =   0.2500
```

Генерируем 10000 случайных точек и вычислим частоту попаданий в тот же интервал [3, 3+2 $\rho\sqrt{2}$]:

```
>> N=10000;t=Gen(X,N);p=sum(t>3 & t<3+2*sqrt(2)*0.477)/N
p =    0.2502
```

Программа верификации кода MATLAB

```
clear all
L=1;N=1000;n=10;B=Gen('exp',L,n,N); minB=min(B); maxB=max(B);
[F,f,H,K]=SmartHist(minB,[],20);Show(K),hold on,plot(H.x,1-exp(-L*n.*H.x),
'g')
[F,f,H,K]=SmartHist(maxB,[],20);figure,Show(K), hold on,plot(F.x,F.F,'r')
[Fun,Par,err]=ApproxLaw('Ray',F); plot(K.x,Fun(K.x,Par),'g')
[Fun,Par,err]=ApproxLaw('norm',F); plot(K.x,Fun(K.x,Par),'b')
L=1;N=1000;n=10;B=Gen('exp',L,n,N);  S='sum(U(1:4))*sum(U(5:8))*(U(9)+U(10))';
b=[]; for i=1:N
U=RabLog(B(:,i));b(i)=Value(eval(S));end,[F,f,H,K]=SmartHist(b,[],50);
[Fun,Par]=Approx('1-exp(-(x*L(1)).^L(2))',F.x, F.F ,[1 1])
Lam=prod(Par).*(Par(1)*f.x).^(Par(2)-1) ; ff=Lam.*exp(-(Par(1)*f.x).^Par(2));
Show(F,'k', f,'k'), FF=Fun(f.x,Par); hold on,plot(f.x, FF,  'r', f.x, ff, 'r')
m=mean(b),s=std(b)
[m,D,s]=MDS('Wei',Par); m, s
plot(f.x(1:30),f.f(1:30)./(1-F.F(1:30))/3, 'g', f.x,ff./(1-FF)/3)

clear all
R=Rab('exp',1.1,'exp',1.2,'exp',2.7,1,'exp',1.5,1,1.4,0.9,'exp',1.6,3);
[Law,P]=EqLaw(R)
R1=Add(R,'exp',1.1,'exp',1.2,'exp',2.7,1,'exp',1.5,1,1.4,0.9,'exp',1.6,3);
R2=Add(R,'Wei',P); R3=Rab('Wei',P,'Wei',P);
[L1,P1]=EqLaw(R1); [L2,P2]=EqLaw(R2); [L3,P3]=EqLaw(R3); P,P1,P2,P3
R1

clear all
A=[];for i=1:10
a=MassModel({'exp',1},{'exp',1/0.99},10^3);A(i)=mean(a);end;T=mean(A)
A=[];for i=1:10
a=MassModel({'exp',1},{'const',1/0.99},10^3);A(i)=mean(a);end;T=mean(A)
t=[0:0.2:1,1.5:0.5:5]; L=1;m=0.5;v=L+m; P0=m/v+L/v*exp(-v*t);
a= MassDyn({'exp',L},{' exp',m},10^3,1,0,t); plot(t(1:length(a)),a, t,P0,'k--
')

clear all
x=0:0.001:0.477; P=2/sqrt(pi)*Trap(exp(-x.^2),x)
2*F_LaplasV(1:3)
2*F_LaplasV([1:4]*(0.477*sqrt(2)))

clear all
x=-3:0.1:3;plot(x, P_Gauss(x), x,F_LaplasV(x), x,2*F_LaplasV(0.477*sqrt(2)*x))
m=2;s=3;x=-10:0.1:10; plot(x,f_Gauss((x-m)/s)/s)
X.m=2;X.s=3;x=-10:0.1:10; plot(x,f_Norm(X,x))
X=Norm_1(3,2); p=Ver(X,3,3+2*sqrt(2)*0.477)
N=10000;t=Gen(X,N);p=sum(t>3 & t<3+2*sqrt(2)*0.477)/N
```

Контрольные вопросы и задачи

1. Какому закону подчиняется расстояние между ближайшими точками простейшего пуассоновского поля на плоскости?
2. Какому закону подчиняется случайный интервал между двумя последовательными событиями стационарного пуассоновского потока?
3. Какова характерная особенность числовых характеристик показательного закона?
4. Как определяется надежность последовательного и параллельного соединений элементов по характеристикам их надежности? Какому закону подчиняются потоки отказов в таких соединениях?
5. В чем суть объектно-ориентированного моделирования надежности сложных соединений элементов?
6. Объясните содержание электроннй формулы MassDyn для моделирования занятости многоканальной системы массового обслуживания. Как можно анализировать вероятность немедленной обработки заявки в системах массового обслуживания с очередями и отказами?
7. Назовите причины, по которым неизвестное распределение может быть принято нормальным.

П Р И Л О Ж Е Н И Е к лекции 5

Гамма-функция и ее свойства

Гамма-функция, представляющая собой интеграл

$$\Gamma(k)=\int_0^\infty e^{-t}t^{k-1}dt\ ,$$

входит множителем практически во все распределения как обобщение факториала на вещественные числа. Основные отношения и свойства гамма-функции справедливы для целых, вещественных и комплексных аргументов:

$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k)$ – функциональное уравнение Эйлера, (П5.1)

$\Gamma(k+1) = k!$ для целых $k > 0$, $\Gamma(1) = 1$; (П5.2)

$\Gamma(k)\Gamma(1-k) = \dfrac{\pi}{\sin \pi k}$ – формула дополнения Эйлера. (П5.3)

Во многих распределениях гамма-функция имеет только целые и полуцелые аргументы. В частности, при $k = 0{,}5$ из отношения (П5.3) следует:

$$\Gamma(0{,}5) = \sqrt{\pi}\ . \qquad (П5.4)$$

Из отношения (П5.1) и следствия (П5.4) вытекает:

$$\Gamma(1{,}5) = \Gamma(0{,}5 +1) = 0{,}5\Gamma(0{,}5) = 0{,}5\sqrt{\pi}\ .$$

$$\Gamma(2{,}5) = \Gamma(1{,}5 +1) =1{,}5\Gamma(1{,}5) = 0{,}75\sqrt{\pi}\ .$$

…

$$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\,(2k-1)!!}{2^k},\ \text{где}\ \ (2k–1)!! = 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k - 1). \qquad (П5.5)$$

Вычисление гамма-функции сталкивается с той же проблемой переполнения разрядной сетки вследсьвие быстрого роста (при аргументах, превышающих 171). В электронной формуле Sampling промежуточные вычисления обходят эту проблему за счет целесообразной организации порядка вычислений. Примерно так же действуют и известные алгоритмы, использующие гамма-функцию в промежуточных вычислениях. Программа gamma из библиотеки MATLAB аккуратно обрабатывае т особые точки, но возвращает Inf при $k > 171$.

Неполная гамма-функция

Неполная гамма-функция имеет переменный верхний или нижний предел. У нижней непллной гамма-функции зафиксирован нижний предел:

$$\gamma(n,y)=\int_0^y e^{-t}t^{n-1}dt\ . \qquad (П5.6)$$

Иногда под гамма-функцией подразумевают регуляризированную гамма-функцию:

$$I(n,y)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^y e^{-t}t^{n-1}dt\ . \qquad (П5.7)$$

Если $n \ge 1$ – целое, то

$$I(n,y)=1-e^{-y}\sum\nolimits_{m=0}^{n-1}\frac{y^m}{m!}\ . \qquad (П5.8)$$

Гамма-распределение

$$f(x;\, n) = \frac{b^{\alpha}}{\Gamma\left(n/2\right)} x^{\alpha-1} e^{-bx}\,. \tag{7.17}$$

M[X] = a/b; D[X] = a/b^2; Mo = (a-1)/b.