

Законы распределения функции двух случайных величин

Общий подход к построению закона распределения функции двух СВ

Вероятностный смысл функции распределения двух СВ

Подобно тому, как закон распределения функции одного случайного аргумента $Y = \varphi(X)$ связан с вероятностью попадания аргумента в область $D(y) = \{x: \varphi(x) < y\}$, функция распределения СВ $Y = \varphi(X_1, X_2)$ определяется вероятностью попадания аргументов в соответствующую двумерную область:

$$F_y(y) \equiv G(y) = P(Y < y) = P((X_1, X_2) \in D(y) = \{x_1, x_2: \varphi(x_1, x_2) < y\}).$$

Если система (X_1, X_2) имеет совместную плотность $f(x_1, x_2)$, функцию распределения можно получить интегрированием по области $D(y)$:

$$G(y) = \int_{D(y)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad g(y) = G'(y).$$

Общий принцип получения законов распределения функций СВ сводится к целесообразному представлению области интегрирования и численному интегрированию по областям сложной формы.

Пример 1: площадь проекции вращающегося параллелепипеда

Площадь проекции на плоский экран беспорядочно вращающегося параллелепипеда связана со сферическими углами θ, φ соотношением (9.5). Чтобы построить функцию распределения $F_S(s) = P(S < s)$, нужно интегрировать плотность $f(\theta, \varphi) = \cos(\varphi)/(2\pi)$ по области $D(s) = \{\theta, \varphi: S(\theta, \varphi) < s\}$. Построим $S(\varphi, \theta)$ для параллелепипеда $10 \times 8 \times 4$ в полном диапазоне углов $0 < \varphi < \pi/2, 0 < \theta < 2\pi$. При этом функции $\sin(\theta)$ и $\cos(\theta)$ нужно заменить абсолютным значением, чтобы учесть все видимые грани при $\theta > \pi/2$:

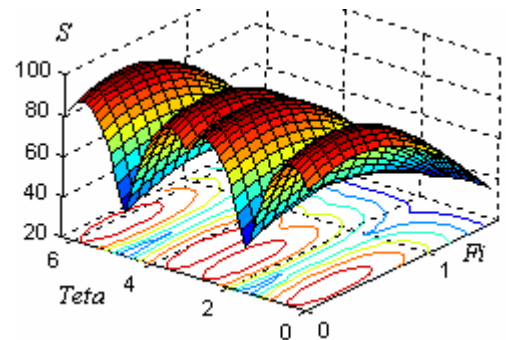


Рис. 10.1. Поверхность $S(\theta, \varphi)$

```
>> Grid=[Fi,Teta]= meshgrid(0:d:pi/2,0:d:pi*2);d=0.1;eval(Grid);
>> Spr='S=c*b*sin(Fi)+a*(c*abs(sin(Teta))+b*abs(cos(Teta))).*cos(Fi)';
>> a=10;b=8;c=4;d=0.1;eval(Spr);surfc(Fi, Teta, S)
```

Из графика на рис. 10.1 видно, что область интегрирования $D(s)$ для вычисления вероятности $G(s) = P(S < s)$ может быть сложной, многосвязной. Поэтому будем выделять ее неявно по значениям сеточной функции S : после вычисления на расчетной сетке плотности распределения обнулять ее в тех расчетных ячейках, в которых $S > s$. Уменьшим шаг сетки, чтобы интеграл плотности $f(\theta, \varphi) = \cos(\varphi) / (2\pi)$ на всей области стал близким к единице:

```
>> d=0.01;eval(Grid);eval(Spr);Z=ones(size(S));Trap2(Z.*cos(Fi),Fi,Teta)/(2*pi)
ans = 0.9995
```

Разобьем интервал возможных значений площади проекции на 100 отрезков и построим функцию распределения $F(s)$ (рис. 10.2), а в качестве простой проверки сеточной функции вычислим среднюю площадь, которая должна быть равной $(ab + bc + ac)/2 = 76$, и дисперсию:

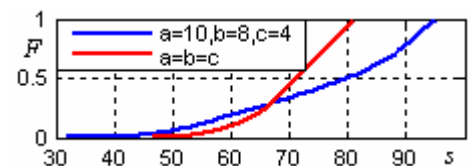


Рис. 10.2. Функция распределения $F(s)$

```
>> c1='y=linspace(min(min(S)), max(max(S)),100);...';
>> c2='F=[];for u=y I=find(S>u);z=Z;z(1)=0;F(end+1)=Trap2(z.*cos(Fi),Fi,Teta)/(2*pi);end';
>> eval(c1),eval(c2);plot(y,F), hold on
>> mD='Y=y(1:end-1)+diff(y)/2;m=dot(diff(F),Y),D=dot(diff(F),Y.^2)-m^2'; eval(mD)
m = 75.9583 D = 222.754
```

Построим для сравнения функцию распределения проекции равновеликого куба:

```
>> h=(a*b*c)^(1/3); eval(Spr); eval(c1),eval(c2); M=6*a^2/4,eval(mD),plot(y,F,'r')
```

$$m = 70.1435 \quad M = 70.1764 \quad D = 53.3603$$

Первый начальный момент m практически совпал с точным значением M средней площади проекции согласно лемме Коши. График на рис. 10.2 показывает меньший разброс площади проекции компактного тела, что подтверждает и четырехкратное уменьшение дисперсии D . Оптимизация линейных размеров поражающего элемента может существенно повысить эффективность. Еще большее влияние на эффективность могут оказать межреберные углы, но выявить это влияние можно только статистическим моделированием.

Построение распределения площади проекции методом статистических испытаний

Программа Mid_S (Листинг 10.2) осуществляет статистическое моделирование случайных ориентаций экрана в пространстве (по умолчанию – равномерных на сфере), вычисляет площадь проекции многогранника в пробных точках и строит по ним статистическую функцию распределения. Применим ее к параллелепипеду из предыдущего примера, чтобы убедиться в точности статистического распределения:

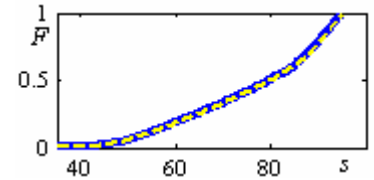


Рис. 10.3. Точная и статистическая функции распределения

```
>> [F,f]=MID_S(Para3([a b c]));[F1,f1]=MID_S(Para3([h h h])); Show (F,'y',F1,'g:')
```

Статистическая функция распределения построена пунктирной линией на графике, полученном ранее, и обе кривые практически совпали (рис. 10.3). Преимущество программы Mid_S в том, что ее можно использовать как электронную формулу для построения законов распределения случайной площади проекций произвольных многогранников.

Распределение площади проекции деформированного параллелепипеда

Построим закон распределения проекции случайно ориентированной косоугольной ромбической призмы. Создать такой геометрический объект можно аффинным преобразованием параллелепипеда (рис. 10.4):

```
>> a=10;h=10;beta=45;ksi=45; R=ParaShape([a a h]);
>> A=Affinor(3,beta/2,221,beta,123,ksi); Fragm=R*A;
```

Объект Fragm может вычислять свои характеристики. Например, объем, среднюю площадь миделя, массу, параметр формы фрагмента можно определить следующим образом:

```
>> V=Volume(Fragm), Sm=Area(Fragm)/4, m=V*0.0078, FI=Sm/V^(2/3)
V = 707.1068 Sm = 150.0000 m = 5.5154 FI = 1.8899
```

Он также обеспечивает необходимыми данными анализ проекций (площади граней, направления нормалей), благодаря чему функцию распределения площади проекции можно получить подстановкой объекта в электронную формулу Mid_S (рис. 10.5):

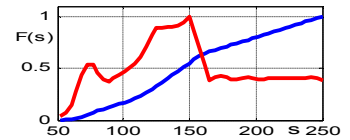


Рис. 10.5.

```
>> [F,f]=MID_S(Fragm); plot(F.x,F.F,f.x,f.f/max(f.f))
```

Кривая плотности распределения нормирована модальным значением. Легко проверить выполнение основного свойства и МО, которое должно быть близким к 150:

```
>> Trap(f.f,f.x), Ms=Trap(f.x.*f.f,f.x)
ans = 1.0000 Ms = 150.0966
```

Создадим объект PR класса Prism – косоугольную призму на ромбе (объект класса ParaGram) со сторонами $a = 10$ и углом $\beta = 45^\circ$, а затем отсечем часть призмы плоскостью PL, наклоненной под углом $\kappa = 45^\circ$ к большой диагонали основания:

```
>> a=10; beta=45; ksi=45; h=10; PR=prism(ParaGram([a a beta/180*pi]),50);
>> PL=Rot(Plane([0 0 1]),3,beta,2,ksi);T=sect(PR,move(PL,[0;0;25]));
```

Функция Prism/sect возвращает два многогранника – верхний $T\{1\}$ и нижний $T\{2\}$. Готовый фрагмент получим отсечением нижней части объекта $T\{1\}$ смещенной на h вверх плоскостью PL (рис. 10.6):

```
>> T1=sect(T{1},move(PL,[0;0;25+h]));Frag=T1{T2}; T{1}=Move(T{1},[0;0;30]);
>> Frag=Move(Frag,[0;0;10]);Show(T{1},T{2},'k',Frag,'FP');
>> Show(T{1},'k',T{2},'k',Frag,'FPA'); view([-0.7 0.5 0.1])
```

Объект Frag, такой же как и результат аффинного преобразования Fragm, получен более универсальным способом, т.к. в основании призмы может быть любой многоугольник.

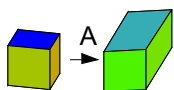


Рис. 10.4.

Пример 2: Моделирование произвольного многогранника



Рис. 10.6.

Пример 3:
Перекрытие прямо-
угольных областей

На прямоугольник с размерами $L_x \times L_z$ (цель) брошен меньший прямо-
угольник $l_x \times l_z$, центр которого распределен по нормальному закону с пара-
метрами $m_x, \sigma_x, m_z, \sigma_z, r=0$ в системе координат, связанной с центром
большого прямоугольника.

Относительная площадь U перекрытия
прямоугольников (отношение площади пере-
крытия к площади цели) зависит от случай-
ных аргументов – координат центра бросае-
мой фигуры. Статистический закон распреде-
ления U (рис. 10.7) построен с помощью клас-
са «умных» прямоугольников так же, как в
Лекции 3, где испытания проводились по рав-
номерному распределению прямоугольников.

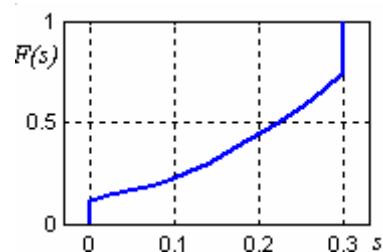


Рис. 10.7. Функция распределения
площади перекрытия

```
>> A=Rect(200,100); B=Rect(100,60);N=1000;X=Norm_2([40,50]);Z=Gen(X,N);
>> for i=1:N S(i)=Area(Sect(A,Move(B,Z(i))))); end, [F,f]=SmartHist(S);Show(F)
```

Законы распределения мультипликативных функций двух СВ

**Закон распределе-
ния произведения
двух СВ**

Произведение двух СВ $Y = X_1 X_2$ имеет значе-
ние, меньше, чем некоторое фиксированное y , в той
области D_y возможных значений x_1 и x_2 , где они
находятся в отношении $x_1 x_2 < y$, т.е. выполняются
неравенства $x_2 < y/x_1$ при положительном x_1 и
 $x_2 > y/x_1$ при $x_1 < 0$ (рис. 10.8):

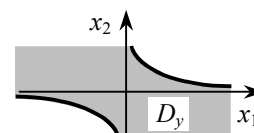


Рис. 10.8. Область
 $D_y = \{x_1, x_2: x_1 x_2 < y\}$

$$G(y) = \iint_{x_1 x_2 < y} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^0 \left(\int_{y/x_1}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 + \int_0^{y/x_1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1,$$

$$g(y) = G'(y) = - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x_1} f\left(x_1, \frac{y}{x_1}\right) dx_1 + \int_0^{\infty} \frac{1}{x_1} f\left(x_1, \frac{y}{x_1}\right) dx_1.$$

В выражении для плотности оба слагаемых положительны, можно объе-
динить интервалы интегрирования:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x_1|} f\left(x_1, \frac{y}{x_1}\right) dx_1. \tag{10.1}$$

**Закон распределе-
ния отношения
двух СВ**

Плотность распределения отношения $Y = X_2/X_1$
можно получить интегрированием по области D_y (рис.
10.9), в которой выполняются неравенства $x_2 < yx_1$ при
 $x_1 < 0$ и $x_2 > yx_1$ при $x_1 > 0$ или из плотности распреде-
ления произведения $X_2(1/X_1)$ заменой x_1 на $1/x_1$:

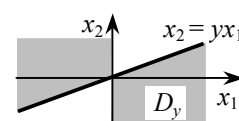


Рис. 10.9. Область
 $D_y = \{x_1, x_2: x_2/x_1 < y\}$

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} |x_1| f(x_1, yx_1) dx_1. \tag{10.2}$$

Пример 4:
распределение
площади прямо-
угольника со слу-
чайными длинами
сторон

Длины сторон $X_1 \in N(10, 2)$ и
 $X_2 \in N(15, 4)$ могут быть зависимыми
($r = 0,4$), поэтому определим систему
двух нормально распределенных СВ,
вычислим на расчетной сетке плотность
распределения по формуле (10.1), и по-
строим график (рис. 10.10):

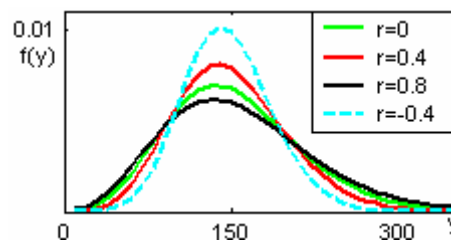


Рис. 10.10. Закон распределения $Y = X_1 X_2$

```
>> X=Norm_2([10;15],[2 4],0.4);x1=Net(X12(X),50); y=linspace(10,500,50); g=[];
```

```
>> S='for i=1:50 for j=1:50 H(j)=f(X,x1(j),y(i)/x1(j));end,g(i)=Trap(1./abs(x1).*H, x1);end';
>> eval(S),plot(y,g,'r'),hold on
```

Чтобы оценить влияние корреляции сомножителей на закон распределения произведения, построим еще два графика при $r = 0; 0,8; -0,4$:

```
>> X=setval(X, 0);eval(S),plot(y,g,'g'), X=setval(X, 0.8);eval(S),plot(y,g,'k')
>> X=setval(X, -0.4);eval(S),plot(y,g,'c--')
```

Качество сеточной функции проверим по выполнению основного свойства плотности распределения, а также сравнением МО произведения, полученных как начальный момент, и точным расчетом по формуле (4.12):

```
>> Trap(g,y), m=Trap(y.*g,y), My=10*15+(-0.4)*2*4
ans = 0.9997 m = 146.7942 My = 146.8000
```

Пример 5: распределение объема параллелепипеда

Предположим, что высота параллелепипеда как СВ $X_3 \in N(5, 1)$ не зависит от размеров основания X_1, X_2 . В этом случае можно использовать уже известную плотность распределения площади основания (массив g на сетке y) и закон умножения плотностей в виде произведения частных плотностей:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x_1|} f_1(x_1) f_2\left(\frac{y}{x_1}\right) dx_1. \quad (10.3)$$

Определим X_3 как объект H класса $Norm_1$, построим расчетную сетку v , вычислим плотность распределения объема по формуле (10.3):

```
>> H=Norm_1(5,1); v=linspace(10,2000,50);
>> for i=1:50 z(i)=Trap(1./abs(y).*g.*f(H,v(i)./y), y);end
```

Массив z на сетке v можно использовать как плотность распределения. Вычислим средний объем m и вероятность того, что объем не выйдет из допустимых пределов $0,75m < v < 1,5m$:

```
>> m=My*5, Mv=Trap(v.*z,v), Ind=find(v>0.75*m & v<1.5*m);p=Trap(z(Ind),v(Ind))
m = 734 Mv = 733.7118 p = 0.6116
```

Пример 6: закон распределения отношения нормальных центрированных СВ

Если СКО центрированных $X_1 \in N(0, \sigma_1), X_2 \in N(0, \sigma_2)$ различны, заменой переменных $u_i = u_i / \sigma_i$ преобразуем совместное распределение в круговое. Известно, что при любом законе $f(u_1, u_2)$ с круговой симметрией отношение $Y = U_2 / U_1$ подчиняется закону Коши:

$$g(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}. \quad (10.4)$$

В самом деле, если $f(u_1, u_2) = \rho(u_1^2 + u_2^2)$, то $f(u_1, y u_1) = \rho(u_1^2(1+y^2))$. Вид функции ρ не имеет значения, поскольку после замены переменной $u = u_1 \sqrt{1+y^2}$ получим (подынтегральная функция четная):

$$g(y) = 2 \int_0^{\infty} u_1 f(u_1, y u_1) du_1 = \frac{2}{1+y^2} \int_0^{\infty} u \rho(u^2) du = \frac{2}{1+y^2} C,$$

где постоянная C определяется из условия

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy = 2C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2} dy = 2\pi C.$$

Таким образом, СВ $Y = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cdot \frac{X_2}{X_1} = \frac{U_2}{U_1}$ распределена по закону Коши, а так как $Z = \frac{X_2}{X_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} Y$, $\psi(z) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} z$, $\psi'(z) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = k$, отношение координат Z подчиняется закону

$$f_Z(z) = f_Y(\psi(z))\psi'(z) = \frac{k}{\pi(1+z^2k^2)}, \quad k = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

Законы распределения аддитивных функций двух СВ

Закон распределения суммы двух случайных величин

Закон распределения СВ $Y = X_1 + X_2$ получается интегрированием совместной плотности $f(x_1, x_2)$ по области $D(y) = \{x_1, x_2 : x_2 < y - x_1\}$, которую в каждом конкретном случае нужно согласовывать с областью возможных значений случайных слагаемых. На рис. 10.13 а показаны области интегрирования D_y^∞ для неограниченных x_1, x_2 . В этом случае

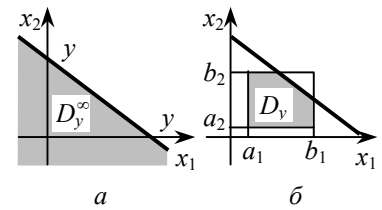


Рис. 10.13. Область интегрирования для суммы СВ

$$G(y) = \iint_{x_1+x_2 < y} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{y-x_1} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1, \quad (10.6)$$

$$g(y) = G'(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, y - x_1) dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(y - x_2, x_2) dx_2. \quad (10.7)$$

Если интервалы возможных значений слагаемых ограничены, соответственно ограничена и область интегрирования D_y (рис. 10.13 б). В частности, область интегрирования положительных слагаемых представляет собой треугольник $D_y^\infty = \{x_1, x_2 : x_2 < y - x_1, x_1 > 0, x_2 > 0\}$, а в формуле (10.7) бесконечные пределы интегрирования следует заменить на $[0, y]$:

$$g(y) = \int_0^y f(x_1, y - x_1) dx_1 = \int_0^y f(y - x_2, x_2) dx_2. \quad (10.8)$$

Законы распределения разности двух СВ

Закон распределения разности $Y = X_1 - X_2$ совпадает с законом распределения суммы $Y = X_1 + (-X_2)$ системы $(X_1, -X_2)$. Для плотности распределения разности неограниченных СВ можно применить формулу (10.7) :

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, -y + x_1) dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(y - x_2, -x_2) dx_2. \quad (10.9)$$

Композиция законов распределения

Закон распределения суммы независимых СВ называется композицией законов распределения. Для композиции используется специальное обозначение $g = f_1 \circ f_2$. Совместную плотность в формулах (10.7), (10.8) можно заменить произведением частных законов:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) f_2(y - x_1) dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y - x_2) f_2(x_2) dx_2. \quad (10.10)$$

Некоторые законы распределения обладают свойством устойчивости по отношению к композиции, т.е. композиция двух и более СВ с одним из таких законов распределения, подчиняется тому же закону.

Композиция некоторых законов распределения

Композиция двух равномерных законов

Функцию распределения композиции двух равномерных законов в интервалах $a_1 < x_1 < b_1$ и $a_2 < x_2 < b_2$ можно получить как произведение постоянной плотности $f(x_1, x_2) = 1/[(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)]$ на площадь области D_y согласно рис. 10.13 б. Особый интерес представляет композиция двух СВ, равномерно распределенных в одном и том же интервале (рис. 10.14). Пусть $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = b_2 = b$, тогда функция распределения равна площади треугольника под $x_2 = y - x_1$ при $0 < y < b$ и как площадь дополнение к такому треугольнику при $b < y < 2b$:

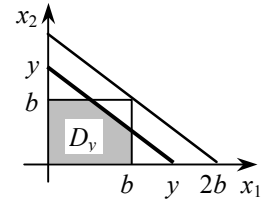


Рис. 10.14. К построению закона Симпсона

$$G(y) = \begin{cases} \frac{y^2}{2}, & y < b, \\ b^2 - \frac{1}{2}(2b - y)^2, & y > b. \end{cases}$$

Плотность распределения суммы двух независимых реализаций СВ, равномерно распределенной в интервале длиной b имеет вид треугольника (рис. 10.15):

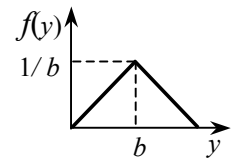


Рис. 10.15. Закон Симпсона

$$g(y) = G'(y) = \begin{cases} y, & y < b, \\ 2b - y, & y > b. \end{cases}$$

Это распределение называется *законом Симпсона*. Ему подчиняется, например, сумма результатов двух независимых измерений по грубой шкале. Сумма большого числа таких измерений подчиняется нормальному закону.

Композиция нескольких равномерных законов

Построим плотность распределения суммы нескольких независимых реализаций датчика случайных чисел, воспользовавшись файл-функцией SmartHist. Каждое слагаемое будем разыгрывать 500000 раз, а число слагаемых увеличивать от 2 до 6, и построим графики статистических оценок плотностей распределения для каждого варианта (рис. 10.16):

```
>> for k = [12,2:6] A=rand(500000,k); [F,f]=SmartHist(sum(A,2)); plot(f,x,f,f), hold on, end
```

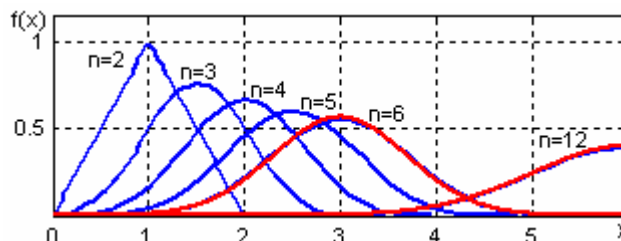


Рис. 10.16. Законы распределения суммы нескольких независимых СВ

Качество приближения можно оценить по первому варианту с двумя слагаемыми, который практически совпадает с законом Симпсона. При трех слагаемых плотность распределения нелинейная, дальнейшее увеличение числа слагаемых приближает плотность распределения к нормальной кривой, которая вычислена для $n = 6$ объектом класса Norm_1 с параметрами $m = 3$, $\sigma = \sqrt{1/2}$ и выведена на этот же график красным цветом:

```
>> x=0:0.01:6;X=Norm_1(3,sqrt(1/2)); plot(x,fff(X,x),'r', x, fff(Norm_1(6,1),x),'r')
```

Получение реализаций нормального закона с помощью датчика случайных чисел

Сумма n независимых СВ X с $m_x = 1/2$, $D_x = 1/12$ имеет характеристики $m(n) = n/2$, $D(n) = n/12$. При $n = 6$ МО и дисперсия равны, соответственно, 3 и $1/2$, поэтому кривая плотности суммы шести слагаемых практически совпала с нормальной кривой с параметрами $m = 3$, $\sigma = 1/\sqrt{2}$. На этом основан простой способ получения реализаций стандартного нормального закона ($m = 0$, $\sigma = 1$) с помощью датчика случайных чисел: **сумму шести случайных чисел**

уменьшить на 3 и умножить на $\sqrt{2}$ (или сумму $n = 12$ случайных чисел уменьшить на 6).

Можно считать, таким образом, что сумма $n > 5$ независимых реализаций СВ, распределенной равномерно в интервале $[\alpha, \beta]$, подчиняется нормальному закону с параметрами $m(n) = n(\beta - \alpha)/2$, $D(n) = n(\beta - \alpha)^2/12$.

Композиция равномерного и нормального распределений

Композиция равномерно распределенной СВ $X \in [\alpha, \beta]$ и $Z \in N(m, \sigma)$ подчиняется закону распределения с плотностью

$$g(y) = \int_{\alpha}^{\beta} f_X(x) f_Z(y-x) dx = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f_Z(y-x) dx = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f_{Z-y}(x) dx,$$

где $f_{Z-y}(x)$ – плотность нормального закона

$$f_{Z-y}(x) = f_Z(y-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{y-x-m}{\sigma}\right]^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-(y-m)}{\sigma}\right]^2}$$

с тем же СКО, что у СВ Z , с центром в $y - m$. Таким образом, плотность композиции в точке y можно вычислить как вероятность попадания в интервал $[\alpha, \beta]$ СВ $U \in N(y - m, \sigma)$.

Построим график $g(y)$ при $\alpha = 0$, $\beta = 10$, $m = 3$, $\sigma = 2$ в интервале значений аргумента $[m \pm \sigma] \cdot 1,5$. Воспользуемся классом Norm_1:

```
>> a=10;Z=Norm_1(3,2);y=Net(Z)*1.5;U=moveTo(Z,y-3);g=Ver(U,[0 a])/a;
```

Выведем также графики плотностей слагаемых СВ (рис. 10.17):

```
>> figure,plot(y,g,'r'),hold on, plot(y,fff(Z,y)), plot([0 0 a],[0 1/a 1/a 0], 'k')
```

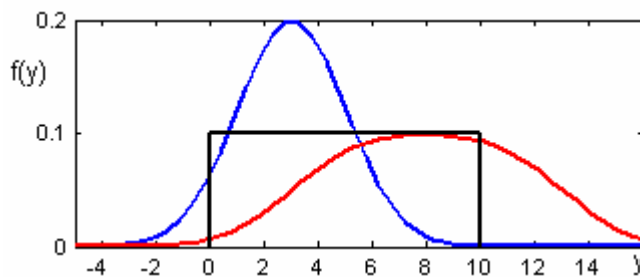


Рис. 10.17. Законы распределения нормального, равномерного законов и их композиции

Композиция двух показательных распределений

Композицию СВ X_1 и X_2 , распределенных по показательному закону с параметрами λ_1 и λ_2 найдем интегрированием произведений плотностей $f(x_1) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1}$, $x_1 > 0$, $f(x_2) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2}$, $x_2 > 0$ по треугольнику D_y^∞ :

$$\begin{aligned} g(y) &= \int_0^y \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \lambda_2 e^{-\lambda_2 (y-x_1)} dx_1 = \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \int_0^y e^{(\lambda_2 - \lambda_1) x_1} dx_1 = \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 y} (e^{(\lambda_2 - \lambda_1) y} - 1) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 y} - e^{-\lambda_2 y}), y > 0. \end{aligned}$$

Это распределение называется *обобщенным законом Эрланга* первого порядка. Раскрыв неопределенность при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, получим *закон Эрланга* первого порядка:

$$g(y) = \lambda^2 \left(-\frac{d}{d\lambda} e^{-\lambda y} \right) = \lambda^2 y e^{-\lambda y}, \quad y > 0.$$

Композиция нескольких показательных распределений

Композиция СВ X_1, \dots, X_k , подчиненных показательному закону с параметром λ , может означать время T_k ожидания k последовательных событий в потоке событий с интенсивностью λ (рис. 10.18). Очевидно, $T_k < t$, если в интервале $[0, t]$ наступило не менее k событий. Вероятность наступления одного события в интервале длительностью t определяются по формуле Пуассона с параметром $a = \lambda t$. Функция распределения СВ T_k – вероятность наступления не менее k таких событий:

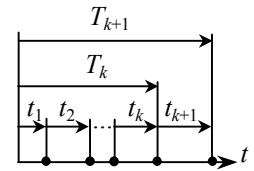


Рис. 10.18. Композиция в потоке событий

$$F(t) = P(T_k < t) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}.$$

Легко установить, что в выражении для производной $F'(t)$ после сокращений остается только одно слагаемое:

$$f(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}.$$

Закон Эрланга

Часто представляет интерес не сама длительность ожидания k событий, а время ожидания следующего за ними $(k + 1)$ -о события. В таких случаях говорят, что из потока пропускают k событий, а $(k + 1)$ -е – обрабатывают. Закон распределения интервала между обрабатываемыми событиями

$$f_k(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \tag{10.11}$$

называется законом Эрланга k - о порядка. Этому закону подчиняется, например, длина свободного пробега танка на минном поле с определенной линейной плотностью λ при условии, что k мин экипаж может обезвредить.

Создадим файл-функцию f_Erlang и построим с ее помощью графики распределения Эрланга порядков от 0 до 5 (рис. 10.19):

```
>> t=0:0.1:10; L=1.5; for k=0:5 y=f_Erlang(t,L,k);plot(t,y), hold on,end
```

При $k = 0$ закон Эрланга превращается в показательный закон и приобретает характерную особенность при малых значениях аргумента плотность показательного распределения в нуле совпадает с параметром λ , тогда как вероятность события $T \in [0, \Delta t]$ в распределениях Эрланга положительных порядков стремится к нулю при малых Δt (как вероятность более, чем одного события в малом интервале пуассоновского потока).

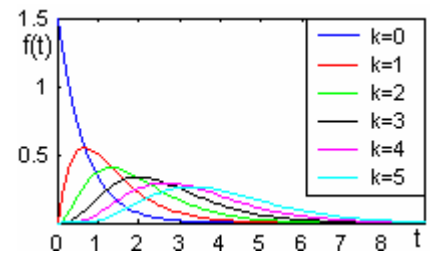


Рис. 10.19. Плотность распределения закона Эрланга

С другой стороны, $t^k e^{-t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, следовательно, плотность распределения Эрланга имеет экстремум: $f'_k(t) = 0$ при $kt^{k-1} - \lambda t^k = 0$, откуда следует $M_0 = k/\lambda$. МО и дисперсию найдем как ЧХ суммы $k + 1$ независимых СВ, распределенных по показательному закону с параметром λ :

$$m_k = \frac{k+1}{\lambda}, \quad D_k = \frac{k+1}{\lambda^2}.$$

Разность двух независимых показательных распределений

Закон распределения разности $Y = X_1 - X_2$ построим по первой формуле (10.11), изменив знак аргумента функции f_2 на противоположный. Показательный закон определен для положительных аргументов, при $y > 0$ неравенство $x_1 - y > 0$ выполняется в интервале (y, ∞) , при $y < 0$ – в интервале $(0, \infty)$:

$$g(y) = \int_y^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \lambda_2 e^{-\lambda_2(x_1-y)} dx_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{\lambda_2 y} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)y} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_1 y}, \quad y > 0.$$

$$g(y) = \int_0^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \lambda_2 e^{-\lambda_2(x_1-y)} dx_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{\lambda_2 y}, \quad y < 0.$$

Этому закону подчиняется случайный интервал между двумя событиями из *разных* пуассоновских потоков. В случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ обе ветви можно представить единым выражением – двусторонним экспоненциальным *распределением Лапласа*:

$$g(y) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}. \quad (10.12)$$

Композиция двух СВ, распределенных по закону Пуассона

Если X_1, X_2 независимые СВ, распределенные по закону Пуассона с параметрами a_1, a_2 , возможные значения суммы $Y = X_1 + X_2$ – все целые числа (с нулем), а вероятности $p_k = P(Y = k)$, можно выразить через параметры слагаемых СВ дискретным аналогом формулы (10.10):

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = m) &= \sum_{k=0}^m P(X_1 = k)P(X_2 = m - k) = \sum_{k=0}^m \frac{a_1^k}{k!} e^{-a_1} \frac{a_2^{m-k}}{(m-k)!} e^{-a_2} = \\ &= \frac{e^{-(a_1+a_2)}}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} a_1^k a_2^{m-k} = \frac{e^{-(a_1+a_2)}}{m!} (a_1 + a_2)^m, \quad m = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Закон Пуассона устойчив к композиции. Это значит, что совмещение нескольких простейших пуассоновских полей (*суперпозиция полей*) образует простейшее пуассоновское поле.

Композиция нормальных распределений

Композиция двух независимых нормальных распределений

Предположим вначале, что $X \in N(m_1, \sigma_1), Y \in N(m_2, \sigma_2)$ независимы. Их сумма $Z = X + Y$ имеет плотность распределения согласно (10.25)

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z-x) dx = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(z-x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}} dx.$$

Показатель степени можно представить в виде квадратного трехчлена $\varphi(x) = -Ax^2 + 2Bx - C$, в котором $A > 0$ не зависит от z , коэффициент B содержит z в первой степени, в коэффициент C – во второй. Из интегрального исчисления известно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2 + 2Bx - C} dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{\frac{AC - B^2}{A}}.$$

Функция вида $g(z) = ae^{-tz^2}$ со свойствами плотности распределения может быть только функцией Гаусса (4.13). Это значит, что композиция двух нормальных распределений также подчиняется нормальному закону. Параметры этого распределения можно определить из структуры коэффициентов a и t , но их легче найти по теореме о числовых характеристиках:

$$\begin{aligned} M_z &= M[X_1] + M[X_2] = m_1 + m_2, \\ \sigma_z^2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2. \end{aligned}$$

Композиция двух зависимых нормальных распределений

Плотность распределения суммы тех же СВ X, Y при ненулевом коэффициенте корреляции получается интегрированием по одной из формул (10.23). Подстановка в нее совместной плотности двумерного нормального закона (6.7) опять приведет к показательной функции с аргументом в виде квадратного трехчлена от z . Таким образом, нормальный закон устойчив относительно сложения: *сумма двух нормальных распределений также подчиняется нормальному закону*. Параметры распределения суммы $X_1 \in N(m_1, \sigma_1), X_2 \in N(m_2, \sigma_2)$ с коэффициентом корреляции r между X_1 и X_2 :

$$m_y = m_1 + m_2,$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2r\sigma_1\sigma_2.$$

Композиция двух нормально распределенных случайных векторов

Многомерный случайный вектор подчиняется нормальному закону, если его проекции подчиняются нормальному закону. Векторную сумму двух случайных векторов можно представить суммой проекций слагаемых векторов. Так как одномерные нормальные законы устойчивы относительно сложения, проекции векторной суммы, а значит, и сам вектор подчиняются нормальному закону. Естественно, проекции должны быть взяты *в одной и той же системе координат*. Ошибки прицеливания и технического рассеивания задаются главными СКО, но в ошибках прицеливания одним из главных является направление на цель с позиции наблюдателя, а в ошибках рассеивания – направление стрельбы. Для нахождения их композиции нужно преобразовать один из слагаемых векторов к системе координат, на которую проецирован другой вектор.

Композиция объектов Norm2

В классе двумерных случайных нормально распределенных векторов Norm_2 композицию векторов выполняет операция сложения. Слагаемые должны быть определены в одной системе координат. Преобразование параметров распределения при повороте локальной системы координат осуществляет метод RotAxes. Если вектор X определен в системе координат групповой цели, а параметры вектора Y заданы в системе координат, повернутой на угол ϕ (рис. 10.20, а), композицию $Z = X + Y$ (суммарное рассеивание) можно получить выражением: $Z = X + \text{RotAxes}(Y, -\phi)$.

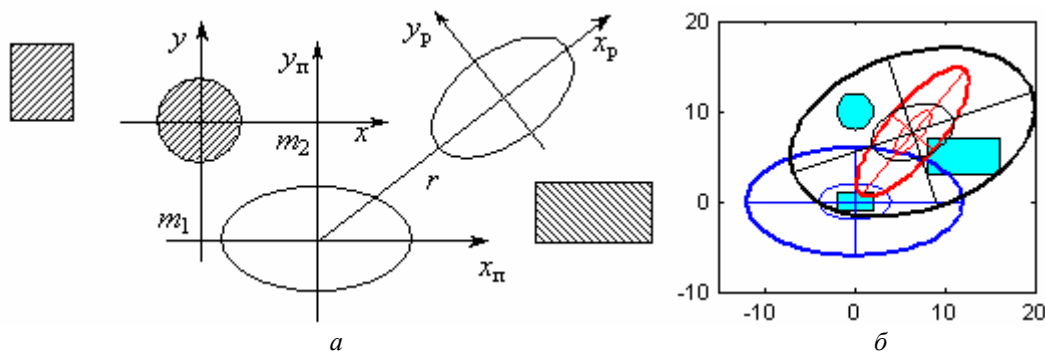


Рис. 10.20. Композиция нормальных законов в плоскости расположения группы целей

Определим геометрические объекты R, R1, C, вектор групповых ошибок Xg, вектор индивидуальных ошибок в направлении от центра групповой ошибки Xr под углом ϕ от оси x главной системы. Приведем индивидуальные ошибки к главной системе координат, вычислим суммарную ошибку X, покажем все объекты (рис. 10.20, б):

```
>> R=Rect(4,2); R1=R*2+[12;5];C=Circ(2,[0;10]);
>> Xg=Norm_2([4 2]); Xr=Norm_2([3 1],[10; 0]); phi=50;Xi=RotAxes(Xr,-phi,1); X=Xi+Xg;
>> ShowAll(R,'Fc',R1,'Fc',C,'Fc',Xg,Xi,'r',X,'k')
```

Покажем параметры всех объектов Norm_2:

```
>> Xg,Xr,Xi,X
Norm_2 Xg: MO = [0 0], СКО = [4 2]
Norm_2 Xr: MO = [10 0], СКО = [3 1]
```

Norm_2 Xi: MO = [6.4279 7.6604], CKO = [2.0749 2.3863], r = 0.7956

Norm_2 X: MO = [6.4279 7.6604], CKO = [4.5062 3.1136], r = 0.2808

Функция Ver с несколькими геометрическими объектами в списке аргументов возвращает вероятность попадания в один из них и вероятности попадания в каждый объект:

```
>> [P,pp]=Ver(X,R,R1,C)
P = 0.1270 pp = 0.0036 0.0955 0.0279
```

Задача

Вычислить вероятность хотя бы одного попадания десятью элементами с теми же параметрами рассеивания в случайных направлениях от центра групповых ошибок. Зависимость вероятности хотя бы одного попадания в десяти повторениях для всех возможных углов вылета (с шагом 1°) (рис. 10.21) можно построить следующей командой:

```
>> P=[];for fi=1:360 P(fi,:)=1-(1-Ver(Xg+RotAxes(Xr,-fi,1),R,R1,C)).^10; end, plot(1:360,P)
```

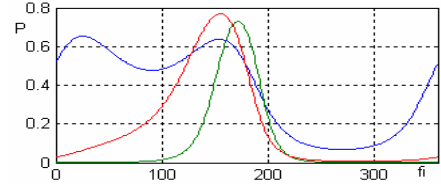


Рис. 10.21. Зависимость вероятности хотя бы одного попадания от направления

Распределение наименьшей и наибольшей из нескольких СВ

Распределение наибольшей из нескольких СВ

Наибольшая из всех СВ системы (X_1, \dots, X_n) задается функцией $Y_{\max} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Событие $(Y_{\max} < y)$ наступает, когда *все* X_i *меньше, чем* y , т.е. представляет собой произведение независимых событий (рис. 10.22):

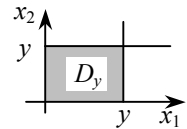


Рис. 10.22. Область $D_y = \{x_1, x_2: \max(x_1, x_2) < y\}$

$$F_Y(y) = P(Y_{\max} < y) = P\left(\prod_{i=1}^n (X_i < y)\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i < y) = \prod_{i=1}^n F_i(y). \quad (10.14)$$

Если все X_i подчиняются одному закону распределения $F_X(x)$,

$$F_Y(y) = F_X(y)^n, \quad (10.15)$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(y)^n = n F_X(y)^{n-1} f_Y(y). \quad (10.16)$$

Распределение наименьшей из нескольких СВ

Функция $Y_{\min} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ определяет наименьшую из всех СВ системы (X_1, \dots, X_n) . Событие $(Y_{\min} < y)$ наступает, когда *хотя бы одна* из X_i *меньше, чем* y (рис. 10.23), т.е. представляет собой сумму независимых событий $(X_i < y)$, $i = 1, 2, \dots, n$, вероятность которой можно определить через вероятность противоположного события:

$$F_Y(y) = P(Y_{\min} < y) = P\left(\sum_{i=1}^n (X_i < y)\right) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(X_i < y)). \quad (10.17)$$

Если все X_i подчиняются одному закону распределения $F_X(x)$,

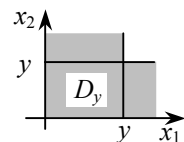


Рис. 10.23. Область $D_y = \{x_1, x_2: \min(x_1, x_2) < y\}$

$$F_Y(y) = 1 - (1 - F_X(y))^n, \quad (10.18)$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = n(1 - F_X(y))^{n-1} f_X(y). \quad (10.19)$$

Построим законы распределения стандартного нормального закона, максимального и минимального значений из $n = 20$ таких СВ (рис. 10.24):

```
>> X=[-5:0.1:5]; F=P_Gauss(X); f=f_Gauss(X); n=20;
>> plot(X,[f; f.*n.*(1-F)^(n-1); f.*n.*F^(n-1)],'r'), hold on,plot(X,[1-(1-F)^n; F^n],'b')
```

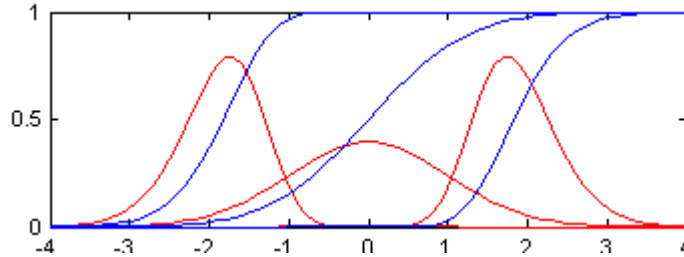


Рис. 10.24. Графики нормального закона, максимального и минимального значений

Наиболее раннее событие из нескольких пуассоновских потоков

Время ожидания первого события в каждом из независимых потоков с плотностями λ_i подчиняется показательному закону $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$. Подстановка в (10.1) дает закон распределения времени ожидания первого из них:

$$F(t) = 1 - \prod_i e^{-\lambda_i t} = 1 - \exp\left(-t \sum_i \lambda_i\right).$$

Как и следовало ожидать, наиболее раннее событие из нескольких независимых потоков подчиняется тому же закону, что и первое событие в пуассоновском потоке с эквивалентной плотностью $\lambda = \sum_i \lambda_i$.

Программа верификации кода MATLAB

```

clear all
Grid=[Fi,Teta]= meshgrid(0:d:pi/2,0:d:pi*2);';d=0.1;eval(Grid);
Spr='S=c*b*sin(Fi)+a*(c*abs(sin(Teta))+b*abs(cos(Teta))).*cos(Fi);';
a=10;b=8;c=4;d=0.1;eval(Spr);surfc(Fi, Teta, S)
d=0.01;eval(Grid);eval(Spr);Z=ones(size(S));Trap2(Z.*cos(Fi),Fi,Teta)/(2*pi)
c1='y=linspace(min(min(S)), max(max(S)),100);...';
c2='F=[];for u=y
I=find(S>u);z=Z;z(I)=0;F(end+1)=Trap2(z.*cos(Fi),Fi,Teta)/(2*pi);end';
eval(c1),eval(c2);plot(y,F), hold on
mD='Y=y(1:end-1)+diff(y)/2;m=dot(diff(F),Y),D=dot(diff(F),Y.^2)-m^2';
eval(mD)
h=(a*b*c)^(1/3); eval(Spr); eval(c1),eval(c2);
M=6*a^2/4,eval(mD),plot(y,F,'r')
[F,f]=MID_S(ParaShape([a b c])); [F1,f1]=MID_S(ParaShape([h h h])); Show
(F,'y:',F1,'g:')
a=10;h=10;beta=45;ksi=45; R=ParaShape([a a h]);
A=Affinor(3,beta/2,221,beta,123,ksi); Fragm=R*A;
V =Volume(Fragm), Sm=Area(Fragm)/4, m =V*0.0078, FI=Sm/V^(2/3)
[F,f]=MID_S(Fragm); plot(F.x,F.F,f.x,f.f/max(f.f))
Trap(f.f,f.x), Ms=Trap(f.x.*f.f,f.x)
a=10; beta=45; ksi=45; h=10; PR=prism(ParaGram([a a beta/180*pi]),50,0);
PL=Rot(Plane([0 0 1]),3,beta,2,ksi);T=Sect(PR,move(PL,[0;0;25]));
T1=Sect(T{1},move(PL,[0;0;25+h]));Frag=T1{2};
T{1}=Move(T{1},[0;0;30]);
Frag=Move(Frag,[0;0;10]);Show(T{1},T{2},'k',Frag,'FP');
Show(T{1},'k',T{2},'k',Frag,'FPA');view([-0.7 0.5 0.1])

clear all
A=Rect(200,100); B=Rect(100,60);N=500;X=Norm_2([40,50]);Z=Gen(X,N);
for i=1:N S(i)=Area(Sect(A,move(B,Z(i))))); end, [F,f]=SmartHist(S);Show(F)

clear all
X=Norm_2([10;15],[2 4],0.4);x1=Net(X12(X),50); y=linspace(10,500,50); g=[];
S='for i=1:50 for j=1:50
H(j)=f(X,x1(j),y(i)/x1(j));end,g(i)=Trap(1./abs(x1).*H, x1);end';
eval(S),plot(y,g,'r'),hold on
X=setval(X, 0);eval(S),plot(y,g,'g'), X=setval(X, 0.8);eval(S),plot(y,g,'k')
X=setval(X, -0.4);eval(S),plot(y,g,'c--')
Trap(g,y), m=Trap(y.*g,y), My=10*15+(-0.4)*2*4
H=Norm_1(5,1); v=linspace(10,2000,50);
for i=1:50 z(i)=Trap(1./abs(y).*g.*f(H,v(i)./y), y);end
m=My*5, Mv=Trap(v.*z,v), Ind=find(v>0.75*m & v<1.5*m);p=Trap(z(Ind),v(Ind))

clear all
for k = [12,2:6] A=rand(500,k); [F,f]=SmartHist(sum(A,2)); plot(f.x,f.f),
hold on, end
x=0:0.01:6;X=Norm_1(3,sqrt(1/2)); plot(x,fff(X,x),'r', x,
fff(Norm_1(6,1),x),'r')
a=10;Z=Norm_1(3,2);y=Net(Z)*1.5;U=moveTo(Z,y-3);g=Ver(U,[0 a])/a;
figure,plot(y,g,'r'),hold on, plot(y,fff(Z,y)), plot([0 0 a a],[0 1/a 1/a 0],
'k')

clear all
t=0:0.1:10; L=1.5; for k=0:5 y=f_Erlang(t,L,k);plot(t,y), hold on,end

clear all
R=Rect(4,2); R1=R*2+[12;5];C=Circ(2,[0;10]);
Xg=Norm_2([4 2]); Xr=Norm_2([3 1],[10; 0]); fi=50;Xi=RotAxes(Xr,-fi,1);
X=Xi+Xg;
ShowAll(R,'Fc',R1,'Fc',C,'Fc',Xg,Xi,'r',X,'k')
Xg,Xr,Xi,X
[P,pp]=Ver(X,R,R1,C)

```

```

P=[];for fi=1:360 P(fi,:)=1-(1-Ver(Xg+RotAxes(Xr,-fi,1),R,R1,C)).^10; end,
plot(1:360,P)

clear all
X=[-5:0.1:5]; F=P_Gauss(X); f=f_Gauss(X); n=20;
plot(X,[f; f.*n.*(1-F).^(n-1); f.*n.*F.^(n-1)],'r'), hold on,plot(X,[F;1-(1-
F).^n; F.^n],'b')

```

Контрольные вопросы

1. Какие законы распределения устойчивы по отношению к композиции? Что это значит?
2. Устойчиво ли к композиции равномерное распределение? Какому закону подчиняется сумма n -и СВ, распределенных равномерно в интервале $[0, 1]$?
3. Какому закону подчиняется сумма двух нормально распределенных СВ $X \in N(m_1, \sigma_1)$, $Y \in N(m_2, \sigma_2)$?
4. Чем объясняется отличие графиков закона Эрланга положительных порядков и показательного распределения при нулевом значении аргумента?