Лекция 1

Случайные события

Непосредственный расчет вероятностей

Вероятностная модель случайного события

Интервалы возможных значений всех существенных факторов ограничивают многообразие условий, которое в общем случае называют *комплексом условий опыта*. Теория вероятностей позволяет установить степень возможности случайного события, но для этого необходимо построить *вероятностную модель случайного события*.

Построение вероятностной модели начинается с установления комплекса условий, в которых ожидается наступление события. Содержательную природу события игнорируют, сам факт реализации комплекса условий называют *опытом*. Прежде всего, нужно определить множество Ω взаимоисключающих (несовместных) результатов опыта – *элементарных событий*. В некоторых случаях элементарные события можно сосчитать или, по крайней мере, перенумеровать целыми числами ω_1, ω_2, … Из условий опыта должны быть известны *вероятности элементарных событий* – положительные числа $P(\omega_i)$, которые служат мерой возможности элементарных событий. Как всякая мера, вероятностная мера аддитивна: вероятность любого подмножества A в Ω равна сумме вероятностей принадлежащих ему элементарных событий: из $A = \bigcup\limits_i \omega_i$ следует $P(A) = \sum\limits_i P(\omega_i)$. Максимальную вероятность имеет все множество элементарных событий, она принимается за единицу: $P(\Omega) = 1$. Любое случайное событие – это множество элементарных событий $A \subset \Omega$, его вероятность обусловлена тем, какую часть Ω составляет множество A: пустое множество соответствует невозможному событию, все множество Ω – достоверному, в остальных случаях $0 < P(A) < 1$.

Классическое определение вероятности

В классическом определении вероятности предполагается, что все элементарные события, несовместные, образующие полную группу, еще и *равновозможны* (их называют *случаями* или *шансами*). Если Ω состоит из конечного числа n элементарных событий, то $P(\omega_i) = 1/n$, и вероятность события A, которому благоприятствуют (входят в множество A) m шансов, определяется как относительное число благоприятных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.1}$$

Чтобы воспользоваться формулой непосредственного расчета вероятностей (1.1), нужно свести задачу к *схеме случаев*, а затем правильно подсчитать знаменатель и числитель.

Пример

По N целей действуют r поражающих элементов (ПЭ), каждый из которых выбирает себе цель случайно, независимо от других. В такой ситуации все ПЭ могут выбрать одну и ту же цель – это случайное событие A. Если $r < N$, то может произойти и событие B – все ПЭ действуют по разным целям. Вероятности событий $P(A)$, $P(B)$ не являются показателями эффективности, но могут быть полезны для понимания способов ее повышения.

Схема выборки с возвратом

Независимый выбор из N целей ПЭ осуществляют по *схеме выборки с возвратом*: из урны, в которой находятся N перенумерованных предметов, M раз выбирают предмет, записывают его номер и возвращают обратно. Элементарный исход данного опыта – последовательность из M чисел со значениями от 1 до N, среди которых могут быть и одинаковые. Общее число таких исходов $n = N^M$. Из них только N могут состоять из одинаковых сомножителей, значит $m_A = N$. Следовательно,

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{N}{N^M}.$$

Схема выборки без возврата

Число m_B исходов, в которых все цели разные, можно получить по *схеме выборки без возврата*: после извлечения из урны номер шара записывают, а шар в урну не возвращают. Число возможностей, равное вначале N, после каждого извлечения уменьшается на единицу, поэтому в M повторениях число возможных комбинаций составляет $m_B = N(N-1)\ldots(N-M+1) = A_N^M$, то есть число размещений из N элементов по M. Эти комбинации составляют только часть всех выборок с возвратом $n = N^M$, следовательно,

$$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{A_N^M}{N^M}.$$

Выборки, различающие элементы

Еще один класс задач, связанных с непосредственным расчетом вероятностей, имеет дело с *выборками без возврата*, *не различающими перестановки элементов* в выборке, поскольку речь идет о физическом наборе предметов, а не о мыслимом наборе их номеров. Например, взятую для контроля случайную выборку M штук из партии N изделий, можно представить набором различающихся номеров, как в выборке без возврата. Перестановки этих номеров относятся к одной и той же выборке, поэтому число вариантов выборки без возврата нужно уменьшить в $M!$ раз:

$$n = C_N^M = \frac{A_N^M}{M!} = \frac{N(N-1)\ldots(N-M+1)}{M!} = \frac{N!}{M!(N-M)!}. \tag{1.2}$$

Если есть основания полагать, что в партии N деталей ровно R бракованных, в случайную выборку объема M может попасть любое их число от 0 до $\min\{M, R\}$. Можно говорить о случайных событиях A – все изделия в выборке годные, B – все изделия в выборке бракованные или D – ровно r из M изделий бракованы. Благоприятствующие этим событиям элементарные исходы легко сосчитать: $m_A = C_{N-R}^M$, $m_B = C_R^M$, $m_D = C_R^r C_{N-R}^{M-r}$, общее число равновозможных исходов известно. Вероятности соответствующих случайных событий можно вычислить по общей формуле (1.1):

$$P(D) = \frac{m_D}{n} = \frac{C_R^r C_{N-R}^{M-r}}{C_N^M}. \tag{1.3}$$

Технология электронных формул и ее преимущества

Формула (1.3) как математическое отношение служит теоретическим основанием для проведения дефектологического анализа, но не благоприятствует соответствующим вычислениям. Например, нельзя по этой формуле непосредственно вычислить наиболее вероятное число дефектных изделий в партии по известному числу брака в контрольной выборке, но можно выявить наиболее вероятную из нескольких *гипотез* многовариантным анализом по этой же формуле. Нужно разумно воспользоваться компьютером, чтобы не составлять программу на каждую задачу и обходиться без *обычно принимаемых для упрощения, но необоснованных допущений*. Все частные задачи должны быть обеспечены адекватными средствами решения, и все частные модели должны быть согласованы в рамках единой программной системы.

Эффективным средством проведения многовариантного анализа может служить *электронная формула* – вычислительная процедура, которая выражает то же математическое отношение, что и аналитическая формула, но реализует его в наиболее благоприятной для анализа форме. В среде MATLAB вычисление по формуле (1.3) реализовано файл-функцией Sampling (Приложение 1, Листинг 1). Функция Sampling векторизована по последнему аргументу, то есть, можно получить вероятность сразу всех интересующих исходов (или по умолчанию – всех возможных исходов). Это позволяет сравнить гипотезы относительно общего числа дефектных изделий по степени их благоприятствования полученному результату (2 дефектных изделия в выборке L = 10 штук из партии N = 50 изделий) с помощью следующей команды MATLAB, последовательно перебирающей все гипотезы от R = 0 до R = N:

```
>> Z=[];N=50;r=2;for R=0:N [m,I]=max(Sampling(N,R,10)); if I==1+r Z(end+1)=R; end, end,Z
   Z =    9    10    11    12    13
```

Из решения следует, что, вероятнее всего, в партии содержится от 9 до 13 дефектных изделий. Лаконичная формулировка задачи возможна благодаря хорошей организации электронной формулы Sampling (см. упражнение 1.10).

Геометрические вероятности

Во многих случаях несовместные, образующие полную группу элементарные исходы образуют континуальное множество, так что пересчитать их невозможно, но есть основания полагать, что все они равновозможны. Тогда в формуле непосредственного расчета вероятностей число возможных исходов надо заменить мерой множества возможных исходов Ω, а число благоприятных исходов – мерой соответствующей части этого множества A:

$$P(A) = \frac{\text{Mes } A}{\text{Mes } \Omega}. \tag{1.4}$$

Характерные задачи определения геометрических вероятностей

В некоторых случаях выделение множества A в Ω достаточно очевидно. Например, равновозможные углы между прямой и отрезком в той же плоскости (рис. 1.1 *а*) находятся в интервале $[0, \pi/2]$, так что $\text{Mes } \Omega = \pi/2$. Если для наступления события A благоприятны углы в интервале $[0, \alpha]$, $\text{Mes } A = \alpha$ и $P(A) = \alpha/\pi$. На рис. 1.1 *б* показан фрагмент бесконечной сетки из одинаковых квадратных ячеек со стороной a, на которую случайным образом брошен круг диаметром d ($d \ll a$). Событие A наступает, если круг не касается полей между ячейками. Событие B наступает, когда круг попадает какой-то частью на эти поля. Чтобы построить вероятностную модель этого события, в качестве равновозможных элементарных событий примем случайное положение круга (координаты центра), выделим в бесконечной сетке *представительную часть* – такой элемент, которым можно заполнить всю сетку, и будем считать, что множество элементарных событий Ω ограничено этим элементом.

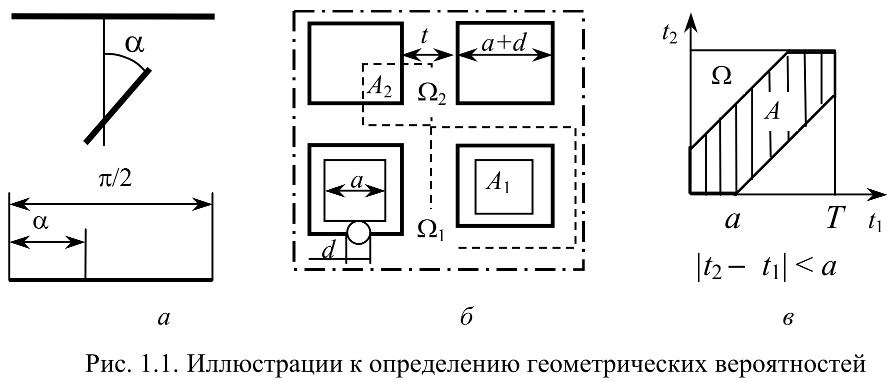


Рис. 1.1. Иллюстрации к определению геометрических вероятностей

Эти условия можно свести к попаданию точки, если увеличить размеры ячейки на d, а круг заменить его центром. Ясно, что при равновозможных положениях точки вероятность события A равна относительной доли площади, занимаемой ячейками на поле. Ввиду регулярности сетки отношение площадей сохраняется в фрагментах, выделенных пунктирными границами, то есть, в формулу (1.4) можно подставить площади областей A_1 (расширенной ячейки) и Ω_1 (прямоугольника, ограниченного средними линиями полей), или по одной четвертой части этих областей A_2 и Ω_2, и т.п. Множество благоприятных исходов для события B получается расширением полей на d.

К модели геометрической вероятности могут быть сведены и задачи не геометрического характера. Если каждый из двух сигналов может поступить в интервале $[0, T]$, событие A наступает при условии, что интервал между ними не превышает a, элементарные события – пары (t_1, t_2) – можно интерпретировать как точки в квадрате, построенном на отрезках $[0, T]$, а область $|t_2 - t_1| < a$ (рис. 1.1, *в*) – как множество благоприятных исходов для A. Следовательно, согласно формуле (1.4)

$$P(A) = \frac{T^2 - (T-a)^2}{T^2}.$$

Статистическая вероятность

Для экспериментальной оценки вероятности на практике используют *свойство устойчивости частоты*: при повторении опыта N раз в одинаковых условиях число наступлений M интересующего случайного события A непредсказуемо, но при многократном повторении таких испытаний частота появления события A в них $p^* = M / N$ колеблется около некоторого числа p:

$$p^* = \frac{M}{N} \approx p, \qquad (1.5)$$

причем с увеличением числа повторений отклонения частоты уменьшаются. Частота (частость) наступления события A называется *статистической вероятностью*. Предел, к которому *сходится по вероятности*[1] частота наступлений события A при неограниченном увеличении числа повторений опыта в неизменном комплексе условий, – это вероятность события A (теорема Я. Бернулли).

Моделирование статистической вероятности

На свойстве устойчивости частот основано компьютерное моделирование случайных событий. Во всех системах программирования так или иначе реализован *датчик случайных чисел*, который вырабатывает случайное число rand с равновозможными значениями в интервале (0, 1). В этих условиях вероятность события (rand $< p$) определяется как геометрическая вероятность и равна p. Следовательно, факт наступления случайного события с известной вероятностью p можно «разыграть» на компьютере, получив значение случайного числа rand: если оно меньше, чем p, событие считается наступившим. Обычно этот механизм используется для моделирования первичных событий в цепи причинно связанных событий, ведущих к наступлению интересующего результата (например, поражения цели): разыгрывают первичные события, по логическим формулам устанавливают факт наступления интересующего события и по результатам всех испытаний определяют его статистическую вероятность как отношение числа успешных розыгрышей к общему числу испытаний.

Сходимость статистической вероятности

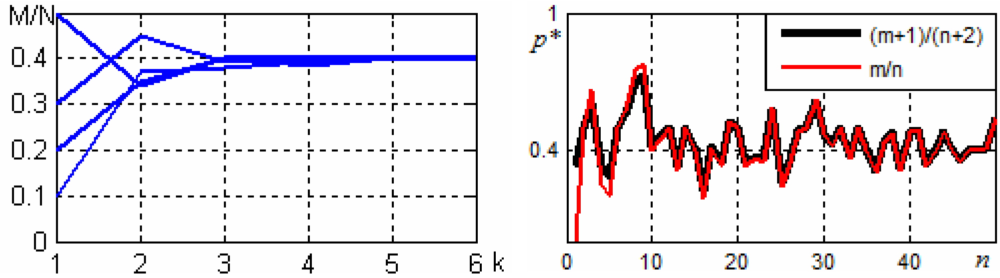
В качестве примера статистических испытаний проведем анализ влияния числа испытаний на сходимость частоты к соответствующей вероятности. В системе MATLAB вызов функции rand с двумя аргументами n, m возвращает $(n \times m)$-матрицу случайных чисел. Сформируем случайный $(1 \times m)$-вектор и проведем серию испытаний, моделируя событие с вероятностью 0,4. Построим график зависимости частоты события от числа повторений $m = 10^k$, $k = 1, 2, \ldots, 6$. На рис. 1.2 *а* показаны несколько таких графиков. Видно, что при числе повторений $m = 10^4$ и выше частота практически сходится к вероятности моделируемого события. Все графики получены повторением одной команды, в которой из случайного вектора с

[1] Величина X_n сходится по вероятности к пределу a, если вероятность события $(|X_n - a| < \varepsilon)$ стремится к единице при сколь угодно малом ε.

10^k элементами оператор find выделяет индексы элементов, меньших, чем 0,4. Отношение числа выделенных элементов к их общему числу и есть частота события:

```
>> for k=1:6 R(k)=length(find(rand(1,10^k)<0.4))/10^k; end, hold on,plot(1:6,R)
```

Результаты выполнения команды случайны, каждое повторение строит новый график.



а *б*

Рис. 1.2. Зависимость частоты событий от числа испытаний

Оценка вероятности при небольшом числе испытаний

Статистические испытания в количестве сотен тысяч можно реализовать на компьютере, в физических же экспериментах число испытаний находится в пределах первого интервала на рис 1.2 *а*, а если объект исследования дорогостоящий, решения приходится принимать по результатам нескольких испытаний. Чем меньше испытаний, тем больше доля неопределенности в частоте благоприятных исходов, что учитывается в формуле

$$\tilde{p} = \frac{M+1}{N+2}, \qquad (1.6)$$

в знаменателе которой к N проведенным испытаниям добавлены еще два возможных, а к числу M успешных – одно из двух.

На рис. 1.2 *б* показаны результаты статистического моделирования события с вероятностью 0,4 при различных числах испытаний от 1 до 50. Пунктирная ломаная построена по формуле частот (1.5), сплошная – по оценкам (1.6) следующими командами:

```
for k=1:50 m=length(find(rand(1,k)<0.4));R(k)=(m+1)/(k+2);P(k)=m/k;end
>> plot(1:k,[R;P]), legend('(m+1)/(n+2)','m/n')
```

Из графиков видно, что формула (1.6) дает меньший разброс частот в единичных опытах, чем формула (1.5).

Основные теоремы теории вероятностей

Алгебра событий

Событие C, которое обязательно наступает, когда происходит событие A или B, называется суммой этих событий: $C = A + B$. Это значит, что множество элементарных событий, благоприятствующих C, получается объединением соответствующих множеств для A и B: $C = A \cup B$. Если для поражения цели (событие C) достаточно вывести из строя двигатель (A) или поразить боевой отсек (B), *формула поражения* имеет вид: $C = A + B$. Формула поражения цели, содержащей n жизненно важных агрегатов, представляет собой сумму событий A_i (вывод из строя i -о агрегата), $i = 1, \ldots, n$: $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$.

Событие C, для наступления которого необходимо, чтобы произошли события A и B, называется произведением этих событий: $C = AB$. Множество элементарных событий, благоприятствующих C, получается пересечением соответствующих множеств для A и B: $C = A \cap B$. *Несовместные* события A и B не имеют общих элементарных событий, их произведение – невозможное событие.

Живучесть военной техники повышают резервированием агрегатов, вследствие чего формула поражения сложной цели, как правило, не сводится к простой сумме событий, а содержит *уязвимые комбинации* агрегатов, одновременный выход из строя которых приводит к поражению цели. Функциональная схема уязвимости (ФСУ) сложной цели может содержать уязвимые комбинации, например:

$$A = A_1 + A_2 + (A_3 + A_4)(A_5 + A_6) + (A_7 + A_8)A_9. \qquad (1.7)$$

Наглядно ФСУ (1.7) можно представить, как на рис 1.3. Но наглядность не облегчает вычисления вероятности результирующего события. Вероятности суммы и произведения двух событий выражаются простыми формулами, но их применение к ФСУ, содержащим десятки и сотни простых событий, приводит к громоздким выражениям.

Вероятность суммы событий

Согласно аксиоме аддитивности вероятностной меры вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей слагаемых:

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad (1.8)$$

События A и $\overline{A}$ (не A) несовместны, к тому же, $\overline{A}$ дополняет A до достоверного события, значит, их суммарная вероятность равна единице $P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}) = 1$, и, следовательно,

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \qquad (1.9)$$

Сумма совместных событий $A + B$ эквивалентна сумме несовместных событий $A + B\overline{A}$, поэтому

$$P(A + B) = P(A + B\overline{A}) = P(A) + P(B\overline{A}). \qquad (1.10)$$

Из $B = BA + B\overline{A}$ вытекает $P(B) = P(BA) + P(B\overline{A})$, следовательно,

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (1.11)$$

Формула (1.10) предпочтительнее тем, что ее легко обобщить на случай произвольного числа слагаемых событий:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2\overline{A}_1) + P(A_3\overline{A}_1\overline{A}_2) + \cdots \qquad (1.12)$$

Если слагаемые несовместны, событие $A_2\overline{A}_1$ эквивалентно A_2, $A_3\overline{A}_1\overline{A}_2$ эквивалентно A_3 и т.д., так что формула (1.12) не противоречит (1.8).

Условная вероятность и вероятность произведения событий

Вероятность наступления события A в комплексе условий, при которых обязательно наступает событие B, называется *условной вероятностью* события A, обозначаемой $P(A/B)$. Если условная вероятность совпадает с безусловной, это значит, что события независимы.

$$P(B) = P(B/A) \Leftrightarrow P(A) = P(A/B) \Leftrightarrow (A \text{ и } B \text{ независимы}).$$

В комплексе условий Ω вероятность совместного наступления (произведения) меньше условной вероятности одного события во столько раз, во сколько вероятность другого события меньше единицы:

$$P(AB) = P(B)P(A/B) \text{ или } P(AB) = P(A)P(B/A). \qquad (1.13)$$

Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A)P(B). \qquad (1.14)$$

Следующие утверждения относительно совместных, несовместных, зависимых и независимых событий вытекают из условий зависимости событий:

несовместные события зависимы, так как $0 < P(A) \neq P(A/B) = 0$;
независимые события совместны: $P(AB) = P(A)P(B) > 0$;
эквивалентные события зависимы: $1 > P(A) \neq P(A/B) = 1$.

Если случайные события $A_1, \ldots, A_n$ независимы попарно и в любых сочетаниях, вероятность их произведения равна произведению вероятностей:

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{1.15}$$

Независимость событий распространяется и на их дополнения, поэтому можно применять формулу (1.14) и к слагаемым в формуле (1.12). В случае, когда вероятности всех событий одинаковы $P(A_i) = p$, $P(\overline{A}_i) = 1 - p = q$, $\forall i$, вероятность их суммы можно записать виде геометрической прогрессии:

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = p + qp + q^2 p + \cdots + q^{n-1} p. \tag{1.16}$$

Так как сумма событий и произведение дополнений к ним взаимно обратные ($\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$ – теорема де Моргана), предпочтительнее формулы (1.12) может оказаться выражение вероятности суммы совместных событий через вероятность произведения дополнений:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\prod_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right). \tag{1.17}$$

Это особенно удобно, если события $A_1, \ldots A_n$, а значит и их дополнения, независимы:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - P(A_i)\right). \tag{1.18}$$

Сравним вычисления по формулам (1.18) и (1.12):

```
>> P=0.1:0.05:0.4; R=1-prod(1-P)
R =   0.8747
>> Q=1-P; R=P(1); for i=2:length(P) R=R+prod(Q(1:i-1))*P(i); end,R
R =   0.8747
```

Результаты одинаковы, но вычисление по формуле (1.18) проще. Тем не менее, аддитивная форма (1.16) может быть предпочтительнее в процедурах оптимизации по такому показателю. Представление целевой функции суммой упорядоченных по убыванию слагаемых способствует формулировке принципа максимума и применению эффективного метода оптимизации.

Объектное моделирование независимых случайных событий

Формула сложного события не сводится к чистой сумме или произведению событий, если функциональная схема состоит из последовательно-параллельных звеньев (рис. 1.3). Избежать явного составления выражений для вероятностей сложных событий можно, воспользовавшись объектным представлением событий и переопределив в классе этих объектов арифметические операции в соответствии с теоремами сложения и умножения вероятностей. Тогда для вычисления вероятности события достаточно ввести в компьютер его формулу.

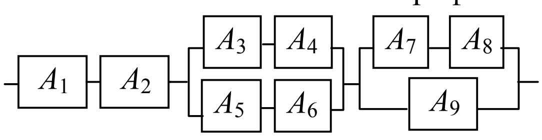


Рис. 1.3. Функциональная схема

В классе независимых случайных событий Randev (листинг 1.2) реализованы операции сложения и умножения вероятностей согласно формулам (1.11), (1.14). Чтобы получить вероятность сложного события, достаточно его определить. Определим события A, B, C с вероятностями $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}4$, $P(C) = 0{,}4$, а также сложные события $D = A + BC$ и $E = (A + B)C + D$:

```
>> [A,B,C]= Randev([0.3,0.4,0.5]), D=A+B*C, E=(A+B)*C+D
P(A) =   0.3
P(B) =   0.4
P(C) =   0.5
P(D) =  0.44
P(E) =  0.6024
```

Правильность вычислений легко проверить. Определим массив из десяти событий с одинаковыми вероятностями 0,1 и вычислим вероятность суммы этих событий по электронной формуле, а также по формуле (1.18):

```
>> X= Randev(ones(1,10)*0.1), U=sum(X), p=1-0.9^10
P(U) =   0.65132,  p=0.6513
```

Объектное моделирование зависимых событий

Реализации формул могут быть и сложными, лишь бы их применение оставалось простым. Установим для событий из предыдущего примера зависимость A и B от C условными вероятностями $P(A/C) = 0{,}45$, $P(B/C) = 0{,}35$ и определим те же сложные события:

```
>>[A,B,C]= Randev([0.3,0.4,0.5]);A=Set(A,C,0.45), B=Set(B,C,0.35), D=A+B*C, E=(A+B)*C
    Событие A: P(A) =   0.3  (3/0.45)
    Событие B: P(B) =   0.4  (3/0.35)
    Событие D: P(D) = 0.396
    Событие E: P(E) = 0.321
```

Большое количество простых событий удобно определить как массив событий с вероятностями, заданными соответствующим числовым массивом:

```
>> a= Randev(0.1:0.05:0.5), S=sum(a(1:7))
Группа событий a: P(a(1:9)) =   0.1 0.15  0.2 0.25  0.3 0.35  0.4 0.45  0.5
P(S) = 0.875
```

Сложное событие, составленное из элементов массива событий, можно определить индексами этих элементов, например:

```
>> A=Set(a,'1+2+(3+4)*(5+6)+(7+8)*9')
Событие A: P(A) = 0.602
```

Событие, определенное символьным выражением, вычисляет свою вероятность при каждом обращении к нему. Если, например, изменить вероятности элементов массива событий, то изменится и вероятность события, определенного на этом массиве. Установим зависимость события a(5) от a(3) и посмотрим, как это повлияло на событие C:

```
>> a(3)=Set(a(3),a(5),0.7);A
Событие A: P(A) = 0.639
```

Основные теоремы теории вероятности

Формула полной вероятности

Чтобы определить вероятность события A, которое может наступить вместе с одним из полной группы несовместных событий $H_1, \ldots, H_n$ – гипотез, достаточно знать вероятности гипотез $P(H_i)$ и условные вероятности $P(A/H_i)$, $i=1, \ldots, n$. Так как $H_1+ \ldots +H_n = \Omega$ – достоверное событие, то для любого события A

$$A = A\Omega = A\left(\sum_i H_i\right) = \sum_i \left(AH_i\right),$$

откуда при несовместных гипотезах следует *формула полной вероятности*

$$P(A) = \sum_i P(AH_i) = \sum_i P(H_i)P(A/H_i). \qquad (1.19)$$

В среде матричного решателя MATLAB вычисления по формуле полной вероятности удобно выполнять операцией скалярного произведения вектора-строки вероятностей гипотез на вектор-столбец условных вероятностей, или с помощью функции скалярного произведения dot, тогда структура векторов не имеет значения, достаточно, чтобы они имели одинаковую длину, например:

```
>> P=Sampling(40,10,7,1:7); G=1-(1-0.3).^(1:7); W=dot(P,G)
W =   0.4268
```

Формула Байеса

Возможными исходами выстрела по цели может быть промах (гипотеза H_0) или попадание в одну из n частей цели (гипотезы $H_1, \ldots, H_n$) с условными вероятностями поражения $P(A/H_i)$. Если выстрел произведен и произошло событие A (цель поражена), каковы вероятности гипотез с учетом этого факта? Поставленный вопрос правомерен. Хотя случайное до опыта событие A стало фактом, оно могло наступить вместе с одной из гипотез $H_1, \ldots, H_n$. Но теперь возможность гипотез нельзя оценивать вероятностями $P(H_i)$, известными до опыта. Так, гипотеза H_0, вероятность которой ненулевая до опыта, не могла реализоваться, раз событие A произошло, что увеличило вероятности других гипотез. Вероятности $P(H_i)$ называются *априорными*, так как они определяются комплексом условий, в котором производится опыт. После того, как опыт произведен и наблюдалось появление события A (или его отсутствие), первоначальная неопределенность условий опыта сужается. Условная вероятность $P(H_i/A)$ называется *апостериорной* вероятностью i-й гипотезы в комплексе условий, благоприятных для события A. *Формула Байеса* для вычисления апостериорных вероятностей гипотез получается очень просто: из того, что $P(H_iA) = P(H_i)P(A/H_i) = P(A)P(H_i/A)$, следует:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_i P(H_i)P(A/H_i)}. \qquad (1.21)$$

Принятие ответственных решений на основе формулы Байеса

Событие A (сигнал «обнаружена цель») в случае появления цели в охраняемой зоне (гипотеза H_1) может наступить с вероятностью $\alpha < 1$. Возможно и ложное срабатывание сигнализатора (гипотеза H_0) из-за помех, внутренних сбоев с малой вероятностью $\beta > 0$. Если априорная вероятность $P(H_1) = p \ll \beta$, система обнаружения угроз сама представляет реальную угрозу, потому что в этом случае сигнал о цели, скорее всего, ложный. Действительно,

$$P(H_0/A) = \frac{P(H_0)P(A/H_0)}{P(H_0)P(A/H_0) + P(H_1)P(A/H_1)} = \frac{(1-p)\beta}{(1-p)\beta + p\alpha},$$

а при $1 - p \cong 1$ и $\alpha \cong 1$ это выражение можно упростить:

$$P(H_0/A) \equiv P_0 = \beta/(\beta + p),$$

и теперь ясно, что при $p \ll \beta$ ложная тревога обеспечена. Для допустимого уровня вероятности помех получим условие $\beta < pP_0$ (учитывая естественное требование $1 - P_0 \cong 1$). Если $\alpha = 0{,}95$, $p = 0{,}01$, и нужно обеспечить $P(H_0/A) \le 0{,}001$, проведенный анализ позволяет сделать вывод: вероятность ложного срабатывания должна быть не выше $\beta = p \cdot 0{,}001 = 0{,}00001$, что можно проверить непосредственной подстановкой в формулу Байеса:

```
>> p=0.01;beta=0.00001;pH0=1/(1+p*0.95/((1-p)*beta))
pH0 =    0.0010
```

Итак, на основе формулы Байеса можно анализировать условия, при которых хоть и не исключается принятие неправильного решения, но обеспечивается приемлемый уровень риска.

Байесовский подход к минимизации риска в многошаговой подготовке принятия решений

В некоторых случаях риск принятия неправильного решения можно снизить ценой дополнительных затрат, в оптимизации которых используется формула Байеса. Например, чтобы установить перспективность нефтяного месторождения (основная гипотеза), необходимо бурить разведочные скважины. Одна успешная скважина не гарантирует успех, равно как и одна неудачная попытка его не исключает. Положительный результат повышает уровень апостериорной вероятности основной гипотезы, но если он недостаточен для принятия положительного решения, можно пробурить еще одну скважину, и еще раз уточнить вероятность гипотезы. Вопрос о том, сколько дорогостоящих попыток нужно сделать, чтобы минимизировать суммарный риск (затрат на разведку и потерь от разработки бедного месторождения) решают на основе *байесовского подхода: последовательно снижают первоначальную неопределенность пересчетом апостериорной вероятности основной гипотезы после оценки очередного испытания*.

```
clear all
for k=1:6 R(k)=length(find(rand(1,10^k)<0.4))/10^k; end, hold on,plot(1:6,R)
for k=1:50 m=length(find(rand(1,k)<0.4));R(k)=(m+1)/(k+2);P(k)=m/k;end
plot(1:k,[R;P]), legend('(m+1)/(n+2)','m/n')

clear all
P=0.1:0.05:0.4; R=1-prod(1-P)
Q=1-P; R=P(1); for i=2:length(P) R=R+prod(Q(1:i-1))*P(i); end,R

clear all
[A,B,C]= Randev([0.3,0.4,0.5]), D=A+B*C, E=(A+B)*C+D
X= Randev(ones(1,10)*0.1), U=sum(X), p=1-0.9^10
[A,B,C]= Randev([0.3,0.4,0.5]);A=Set(A,C,0.45), B=Set(B,C,0.35), D=A+B*C,
E=(A+B)*C

clear all
a= Randev(0.1:0.05:0.5), S=sum(a(1:7))
A=Set(a,'1+2+(3+4)*(5+6)+(7+8)*9')
a(3)=Set(a(3),a(5),0.7);A

clear all
P=Sampling(40,10,7,1:7); G=1-(1-0.3).^(1:7); W=dot(P,G)
p=0.01;beta=0.00001;pH0=1/(1+p*0.95/((1-p)*beta))
```

ПРИЛОЖЕНИЕ

Листинг 1.1. Функция Sampling для вычисления вероятностей возможного состава случайной выборки

```
% Вычисление вероятности того, что в случайной выборке
% L из N ровно k (вектор) взяты из R помеченных (дефектных)
function out = Sampling( N,R,L,k )
if nargin<4 k=[0:L]; end
out=zeros(size(k));
for i = 1:length(k)
   if N>=R & L>=k(i)
      out(i)=CombiCount(R,k(i))*CombiCount(N-R,L-k(i))/CombiCount(N,L);
   end
end
%
function out=CombiCount(n,m)
out = 0; if n < m | m<0 return, end
if m>n/2 m=n-m; end
out = prod(n-m+1:n)/prod(1:m); end
```

Листинг 1.2. Функция моделирования несовместных событий с заданными вероятностями P в статистических испытаниях объема N:

```
% Вычисление индикаторов событий, заданных вероятностями P (вектор),
% в N испытаниях
function A=Events(P,N)
R=cumsum(P);
I=(repmat(R,N,1)-repmat(rand(N,1),1,length(P))) > 0;
A=I-[zeros(N,1),I(:,1:end-1)];
```